高等职业教育“十三五”创新示范教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

主　编　李自勇

高等教育出版社

高等职业教育“十三五”创新示范教材

高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

主编　李自勇
参编　董冠文　何长林　张义民

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是高等职业教育“十三五”创新示范教材，是结合当前高等职业院校高等数学课程的教学现状和编者多年的教学实践经验编写而成的.

本书主要由通识模块、专用模块和拓展模块组成. 通识模块包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用. 专用模块可根据不同专业的培养需要选学，包括常微分方程和级数. 拓展模块根据学生分层差异化教学需要，引入了数学实验和数学建模基础.

本书配套 PPT 课件等资源，其中部分资源可以通过扫描书中二维码获取，教师可以通过封底的联系方式获取更多资源.

本书适合作为高等职业院校高等数学课程的教材，也可供相关人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/ 李自勇主编. —北京：高等教育出版社，2018. 8 (2019. 8重印)

ISBN 978-7-04-050455-2

Ⅰ. ①高 … Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 195237 号

策划编辑 张尕琳 责任编辑 张尕琳 陆韡良 封面设计 张文豪 责任印制 高忠富

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 江苏德埔印务有限公司
开　　本 787mm × 1092mm 1/16
印　　张 17
字　　数 354 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
http://www.hep.com.cn/shanghai
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版　　次 2018 年 8 月第 1 版
印　　次 2019 年 8 月第 2 次印刷
定　　价 36. 00 元

物 料 号 **50455-00**

出版说明

当今，新一轮科技革命和产业升级，对现有的产业结构、生产方式和生活方式产生了深远的影响，也对高等职业教育提出了更高的要求和新的挑战。“十三五”时期是我国高等职业教育现代化建设的关键时期，加快发展现代高等职业教育已成为我国教育发展的重要战略。深化教学改革，提高教学质量，培养社会迫切需要的发展型、复合型和创新型的技术技能人才，促进高等职业教育健康持续发展，是高等职业教育工作者的历史使命。

课程和教材是高等职业教育教学改革的关键与核心，其开发和建设也伴随着我国经济发展进入了新的阶段。“十三五”期间，高等教育出版社组织来自全国高等职业院校的骨干教师、行业企业的教育培训专家和从事高等职业教育教学研究的专家，申报、立项了一批中国职业技术教育学会教学工作委员会、教材工作委员会有关高等职业教育课程改革和教材建设的研究课题。这些课题研究成果体现了高等职业教育教学改革的新思想、新观念，有力地促进了高等职业教育教学改革的发展。在此基础上，高等教育出版社上海出版事业部组织编写、修订并出版了一批反映当前高等职业教育教学改革研究与实践成果的创新示范教材。教材的编写着重在以下几个方面进行了创新尝试。

精炼编写内容

教材内容紧扣立德树人的核心要求，把培养学生的职业道德、职业素养和创新创业能力融入教学内容和教学活动设计中，力图通过全局设计、过程贯通、细节安排提升职业教育课程教学的内涵，培养德智体美全面发展的社会主义事业接班人。

技术的快速发展、经济转型升级使职业教育的专业结构调整、课程内容更新更为常态化，编写满足培养行业、企业人才需要的职业教育新教材，也是本系列教材在创新示范方面的突出特色。

系列教材对部分重点课程还采用了“一纲多本”的编写形式，即同一课程编写多种版本，较好地解决了“通用性”和“个性化”的矛盾。教材内容编写遵守共同基础与多样选择相统一的原则，构建更加开放、更具弹性的课程教材体系，为教师选择和使用教材提供空间，以适应“分层教学”和“专业需求多元化”的现实。

丰富内容组织

高等职业教育课程内容的多样化特征决定了教材多样化的特点。本系列教材不拘于统一的内容组织形式，以满足课程教学需要、有助于职业人才的培养为核心，切实服务于任务引领、项目驱动等多种形式的职业教育课程改革。

本系列教材在内容组织和编写体例方面，根据课程性质、教材内容特点和教学的实际需要进行了多样化的尝试，避免了“章节体”一统天下的局面。教材在结构编排上，在每部分内容的开始有导学，构建学习情景，提出本部分内容的学习目标，在结束时用小结方式强调重点，最后用习题等形式帮助学生自我检查评价。在呈现形式上，体例新颖活泼、直观，用大量的插图表达，双色、彩色印刷使“重点”“难点”醒目、鲜明。着重在“便教”与“利学”上努力创新，强化教材的使用功能。

服务教学设计

教学设计是教师以教育教学原理为依据，为了达到教学目标，根据学生认知特点，对教学过程、教学内容、教学组织形式、教学方法和使用的教学手段进行的策划。教学资源在服务教学设计中具有举足轻重的作用。应用现代教育技术的数字化教学资源，具有丰富的表现力，可以突破教学重点和难点；交互性强，可以充分发挥学生的主体作用；信息量大，更新方便，大大提高学习效率；可碎片化，易于二次开发，方便综合化利用和共享。本系列教材依托高等教育出版社已建设成熟的 MOOC、SPOC 平台，数字出版技术，以及二维码资源平台，统筹规划教学资源建设，为课程教学设计和创新教学方法提供有力的支撑。

教师是教学改革的主体。教学改革与教材建设只有得到教师的支持与参与，才有成功的可能。在教材和配套教学资源建设的同时，我们陆续组织了各种形式的教师培训、教学研讨活动，以帮助教师确立现代职业教育理念，促进教学质量与效率的提高，实现教学改革与教材建设的同步发展。

本系列创新示范教材的出版及其配套工作是一项持续进行、不断完善的工程，我们殷切希望能够得到广大教师的支持和积极参与，共同创新、示范，分享高等职业教育教学改革的成果与经验，为我国高等职业教育的发展做出应有的贡献。

高等教育出版社

2017 年 6 月

前　言

本书是高等职业教育“十三五”创新示范教材，是结合当前高等职业院校高等数学课程的教学现状和编者多年的教学实践编写而成的.

近年来因高等职业院校高等数学课程教学实际、目标要求的变化，迫切需要教材进一步降低理论难度、突出应用，更加适应学生的特点. 高等数学作为高等职业院校最为重要的公共课之一，在内容取舍上，既存在诸如因数学的学科特性、体系的完整性要求必须坚守的内容，又有许多为了适应新的人才培养模式而需要调整的内容. 为此，在高等数学课时有限的条件下，尽可能地在教学中凸显为专业服务的“数学技术”功能，同时又兼有为培养人服务的“数学文化”功能，成为本书编写者重点思考并探索的问题.

随着以数学为基础的计算机及其应用技术的迅速发展，数学研究的方法得到了革命性地改变，数学应用的领域得到了极大地扩展，数学学习的方法得到了极大地丰富. 对于以培养应用型人才为目标的高等职业院校而言，学生学习数学除了要学习其严密的、抽象的理论体系，更要结合所学专业要求和未来职业需求，去学习数学的思想、方法、精神，以及提高使用数学工具解决实际问题的意识和能力，最终使数学成为成才的基本素质和重要基础.

围绕数学锻炼思维、促进人的终生发展的需要，本书试图按照分层次、模块化体系结构编写，重组和优化课程内容. 构建高等数学教学模块时，既要充分考虑“够用”内容的选择；还要考虑学生以后生活、工作中“必需”的知识支撑，增强应用性；同时也要兼顾学生毕业后终生学习的需要.

本书把内容分为通识模块、专用模块和拓展模块. 通识模块以保证满足各专业对高等数学的基本要求为依据，是高等数学中最基本的内容，为专业学生的必修内容，包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用. 专用模块提供不同专业可根据需要选取的内容，包括常微分方程和级数. 拓展模块考虑学生实际以满足分层差异化教学需要，拓展模块Ⅰ引入数学实验，介绍数学软件（MATLAB 软件）的应用，通过实验求微积分，突出一个“用”字；拓展模块Ⅱ主要介绍数学建模基础，以拓展学生数学应用能力，培养数学学习兴趣.

本书整体风格力求简明、直观、通俗易懂，既可以是教学的纲，又可以是学生的课后学习资源. 编者在本书编写过程中配置了丰富的教学资源，学生可以扫描书中知识点旁的二

维码，利用移动终端随时随地观看图文、动画等，形象直观，拓展了学习时空．本书力求精炼内容，讲清概念，降低例题、习题难度，把习题分A、B类，适应分层教学的需要，每章最后选择与数学有关的，有一定趣味性、知识性和应用性的阅读材料，以拓展学生的视野，提高学生对数学在生活中的趣味性和在生产中的实用性的认识，培养学生数学文化素养．

本书适用于高等职业院校各类专业，通识模块中带“＊”号的内容可作为选学，专用模块、拓展模块供不同专业、不同层次教学选用．每一小节参考学时为2学时，总学时为80～110学时（含数学实验）．

本书由甘肃机电职业技术学院李自勇教授担任主编（编写第一、四、五、六章，拓展模块Ⅰ）．参加编写的有甘肃机电职业技术学院董冠文（编写第二章，拓展模块Ⅱ）、何长林（编写第三章）、张义民（编写第七章）．

尽管在编写过程中，编者力求展示“数学技术”和“数学文化”，但由于时间仓促，兼之编者水平有限，效果未必尽如人意，不足之处，诚恳地希望广大师生批评指正．

编　者

2018年5月

CONTENTS

目　录

通识模块　一元函数微积分

附　　录

通识模块

一元函数微积分

CHAPTER 1 第一章

函数、极限与连续

函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型. 微积分以函数为研究对象,以极限方法为研究手段,连续则是函数的一个重要性态. 本章将在中学数学基础上,进一步介绍函数、极限与连续的知识,为以后的学习奠定必要的基础.

第一节 初等函数

为了以后更好地学习一元函数微积分,本节在复习和强化中学所学函数概念的基础上,分析和强调函数的两个要素及四大特性,介绍反函数、复合函数和初等函数的概念.

一、函数

1. 函数的定义

如果当变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的对应法则 f 总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数. 变量 x 的变化范围 D 叫做这个函数的定义域. 通常 x 叫做自变量,y 叫做函数值(或因变量),变量 y 的变化范围叫做这个函数的值域.

y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$, $x\in D$.

对于确定的 $x_0 \in D$，按照函数关系 $y=f(x)$ 对应的函数值记作 y_0，即

$$y_0=y|_{x=x_0}=f(x_0).$$

例 1 已知 $f(x)=2x^2+x-1$，求 $f(0)$，$f(-2)$，$f\left(\frac{1}{a}\right)$.

解 $f(0)=-1$；

$f(-2)=2(-2)^2+(-2)-1=5$；

$f\left(\frac{1}{a}\right)=2\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}\right)-1=\frac{2+a-a^2}{a^2}$.

如果自变量在定义域内任取一个确定的值时，函数只有一个确定的值和它对应，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 这里我们只讨论单值函数.

2. 函数的两要素

由函数的定义可知，一个函数的构成要素为：定义域、对应关系和值域. 由于值域是由定义域和对应关系决定的，所以，定义域和对应关系叫做函数的两要素.

例 2 求函数 $y=\frac{1}{x-1}+\sqrt{4-x}$ 的定义域.

解 要使函数 y 有意义，必须使 $\begin{cases}x-1\neq 0,\\ 4-x\geqslant 0\end{cases}$ 成立，即

$$\begin{cases}x\neq 1,\\ x\leqslant 4,\end{cases}$$

故所求函数的定义域为 $(-\infty, 1)\cup(1, 4]$.

如果两个函数的定义域和对应关系完全一致，我们就称两个函数相同.

例 3 函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否相同，为什么？

解 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都为 $(-\infty, +\infty)$，但当 $x=-2$ 时 $f(-2)=-2$，$g(-2)=2$，对应规律不同，所以它们不相同.

3. 函数的表示方法

通常表示函数的方法有三种：公式法、表格法、图像法.

(1) 公式法

用数学解析式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即是公式法. 上述例子中的函数都是以公式法表示的.

(2) 表格法

将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即是表格法. 例如：在实际应用中，我们经常会用到的平方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数.

(3) 图像法

用坐标平面上的曲线来表示函数的方法即是图像法. 一般用横坐标表示自变量，纵坐

标表示因变量,曲线就是函数的图像.

函数的三种表示方法各有优缺点:公式法的优点是便于理论推导和计算,缺点是抽象;表格法的优点是便于查找函数值;图像法的优点是直观形象,且可看到函数的变化趋势.

4. 函数的简单性态

(1) 函数的有界性

如果对属于某一区间 I 内的所有 x 值总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,其中 M 是一个与 x 无关的正常数,那么我们就称 $f(x)$在区间 I 内有界,否则便称无界.

注: 一个函数,如果在其整个定义域内有界,则称之为有界函数.

例如:函数 $f(x)=\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的.

有界性反映了函数图像是否在平行于 x 轴的两条直线之间.

(2) 函数的单调性

如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随着 x 增大而增大,即:对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调增加的.

如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随着 x 增大而减小,即:对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调减少的.

例如:函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调减少的,在区间$(0,+\infty)$上是单调增加的,如图 1-1 所示.

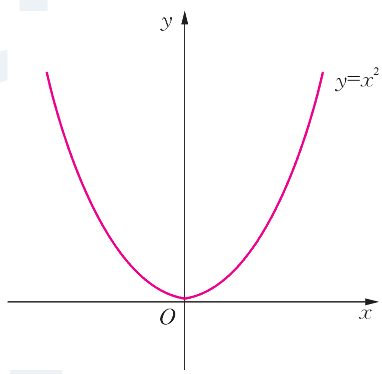


图 1-1

单调性反映了函数图像沿 x 轴正方向的升降.

(3) 函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=f(x)$,则 $f(x)$叫做偶函数;如果函数 $f(x)$对于定义域内的任意 x 都满足 $f(-x)=-f(x)$,则 $f(x)$叫做奇函数.

奇偶性反映了函数图像的对称性:偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

(4) 函数的周期性

对于函数 $f(x)$,若存在一个不为零的数 T,使得关系式 $f(x+T)=f(x)$ 对于定义域内任何 x 值都成立,则 $f(x)$叫做周期函数,T 是 $f(x)$的周期.若 T 是 $f(x)$的周期,则 $2T,3T,\cdots$ 都是周期.

注: 一般我们说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如:函数 $\sin x,\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期性反映了函数图像是否重复出现.

5. 反函数

设 $y=f(x)$ 为定义在 D 上的函数,其值域为 A.若对于数集 A 中的每个数 y,数集 D 中都有唯一的一个数 x 使 $f(x)=y$,这就是说变量 x 是变量 y 的函数,称为函数 $y=$

$f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 其定义域为 A，值域为 D. 函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 二者的图像是相同的.

习惯上总用 x 来表示自变量，用 y 表示因变量. 因此，将函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示，这时候，二者的图像是关于 $y=x$ 对称的.

例如：函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，则它们的图像在同一直角坐标系中关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-2 所示.

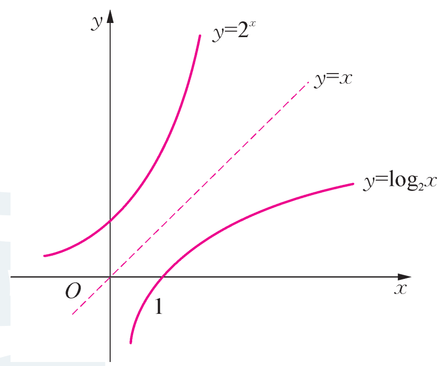


图 1-2

求函数 $y=f(x)$ 的反函数的步骤：

由方程 $y=f(x)$ 解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$；将函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 和 y 互换，得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 4 求函数 $y=2x+1$ 的反函数.

解 由 $y=2x+1$ 可解得，$x=\dfrac{y-1}{2}$，交换 x，y 的位置，即得所求的反函数为

$$y=\frac{x-1}{2}.$$

二、初等函数

1. 基本初等函数

把下列最常用的五种函数统称为基本初等函数：

① 幂函数 $y=x^a$（a 为实数）.

② 指数函数 $y=a^x$（$a>0, a\neq 1$，a 为常数）.

③ 对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）.

④ 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

⑤ 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

以上五种基本初等函数的性质、图像在中学已经学过，后面的学习中经常要用到它们，因此要熟练掌握，大家可自己去列表复习、总结基本初等函数的性质、图像.

2. 复合函数

复合函数的定义：若 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，称其为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

例如，$y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 复合而成的函数是 $y=\sqrt{1-x^2}$.

$y=\tan\sqrt{2x}$ 是由 $y=\tan u$，$u=\sqrt{v}$，$v=2x$ 复合而成的函数.

3. 初等函数

由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算及有限次的函数复合所产生的，并且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数，否则就是非初等函数.

例如：函数 $y=2^{\cos x}+\ln(\sqrt[3]{4^{3x}+3}+\sin 5x)$ 是初等函数.

分段函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1, \\ x, & x\geqslant 1 \end{cases}$ 是非初等函数.

今后我们讨论的函数，绝大多数是初等函数.

习题 1.1

A

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\dfrac{x^2}{x}$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1+x}$；　　(2) $y=\sqrt{1-x}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$.

3. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & -1\leqslant x<0, \\ 2, & 0\leqslant x<1, \\ x-1, & 1\leqslant x<3. \end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域；　　(2) 求 $f(0)$；

(3) 求 $f(1)$；　　(4) 作出 $y=f(x)$ 的图像.

5. 指出下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y=x^2$，$x\in(0,2)$；　　(2) $y=\cos x$，$x\in(-1,0)$；

(3) $y=e^{-x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

6. 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sin^5 x$；　　(2) $y=(2-3x)^{\frac{1}{2}}$.

B

1. 指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数.

(1) $y=x^5$;　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}$;　　(3) $y=\cos x$.

2. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(2) $y=x\cos x$.

3. 求证：函数 $y=1-\sin x$ 是有界函数.

4. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-1$;　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

习题 1.1
参考答案

第二节　极限的概念

极限是微积分探究函数的基本工具. 当自变量无限接近于某个“目标”时，函数无限接近于什么？是否无限接近于某个常数？解决这类问题的方法称为极限方法.

一、数列的极限

我们先结合中学数学的学习，认识数列及极限的概念.

1. 数列与函数

若按照一定的法则次序，有第一个数 a_1，第二个数 a_2，……，依次排列下去，使得任何一个正整数 n 对应着一个确定的数 a_n，那么，我们称这列有次序的数

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

为数列，简记为 $\{a_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 a_n 叫做数列的一般项或通项.

数列 $f(n)$ 可以看作是自变量为正整数 n 的函数，即 $a_n=f(n)$，它的定义域是全体正整数.

2. 刘徽的割圆术与极限

我国古代杰出的数学家刘徽在求圆的面积时，通过作圆的内接正多边形，近似求出圆的面积，称之为割圆术. 他“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣.”的说法，体现的就是极限的思想.

设有一圆，首先作圆内接正六边形，把它的面积记作 A_1；再作圆的内接正十二边形，其面积记作 A_2(图 1-3)；再作圆的内接正二十四边形，其面积记作 A_3；依次进行下去，把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记作 A_n，可得一系列内接正多边形的面积：

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots,$$

它们就构成一列有序数列.

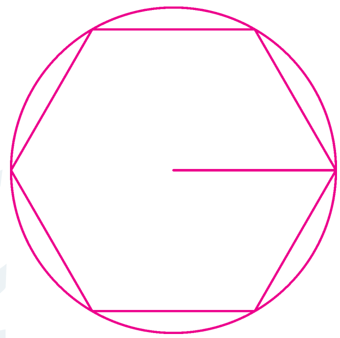


图 1-3

我们可以发现，当内接正多边形的边数无限增加时，A_n 也无限接近于某一确定的数值(圆的面积)，这个确定的数值在数学上就被称为数列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 当 $n\to\infty$(读作 n 趋近于无穷大)时的极限.

3. 数列极限的直观描述定义

定义 1.1 对于数列 a_n 来说，如果当 n 无限增大时，数列 a_n 的值无限接近于一个确定的常数 A，那么常数 A 就叫做数列 a_n 的极限，或者称数列 a_n 收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad (\text{或当 } n\to\infty \text{ 时}, a_n\to A).$$

简单数列的极限，我们能用定义中的极限思想观察判断.

例 1 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $a_n=\dfrac{1}{n}$； (2) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$.

解 (1) $a_n=\dfrac{1}{n}$ 展开为

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots, \to 0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

(2) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ 展开为

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots, \to 1,$$

课堂练习 1.1

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

如果在 n 无限增大的过程中，数列 a_n 没有无限接近于一个确定的常数 A，则称数列 a_n 无极限，或称数列 a_n 发散.

例如：数列 $a_n=(-1)^n$ 展开为 $-1, 1, -1, 1, \cdots$，当 n 无限增大时，a_n 在 -1 与 1 两个数上来回跳动，数列 $a_n=(-1)^n$ 无极限，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

二、函数的极限

前面我们讨论了数列的极限，数列可看作一类特殊的函数，即自变量为正整数的函数. 若自变量不再限于正整数的顺序，而是连续变化的，就成了一般的函数. 下面我们来学习函数的极限.

讨论当自变量无限接近于某个“目标”时，函数是否无限接近于某个常数，自变量无限接近的“目标”有如下两种类型：

(1) 自变量绝对值无限增大——趋于无穷大($x\to\infty$)；

(2) 自变量无限接近某一定点 x_0——趋于有限值($x\to x_0$).

下面我们结合数列的极限，来学习函数极限的概念.

1. 自变量绝对值无限增大时函数的极限直观描述定义

定义 1.2 对于函数 $f(x)$，如果当 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 的值无限接近某常数 A，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \qquad (\text{或当 } x\to\infty \text{ 时}, f(x)\to A).$$

例如，如图 1-4 所示，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 x 的绝对值无限增大时，$f(x)$ 的值无限接近于零. 那么 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 或当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$.

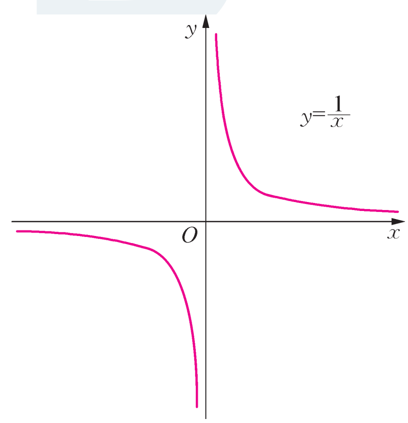


图 1-4

上述定义中自变量 x 的绝对值无限增大指的是 x 既取正值而无限增大(记作 $x\to+\infty$)，同时也取负值而绝对值无限增大(记作 $x\to-\infty$). 但有时 x 的变化趋向只能或只需取这两种变化中的一种情形，我们可以给出当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时函数极限的直观描述性定义.

定义 1.3 如果当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x)=A$$

或当 $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时，$f(x)\to A$.

例如，讨论函数 $y=e^x$ 趋于无穷大时的极限，如图 1-5 所示. 观察判断：

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \text{ 不存在.}$$

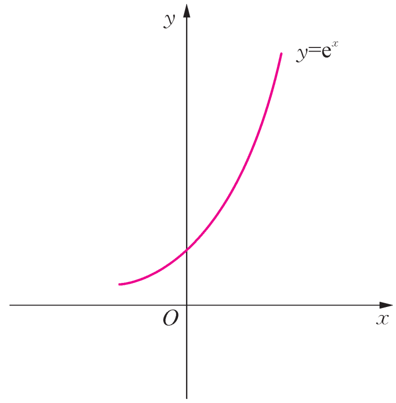


图 1-5

因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$ 不存在.

2. 自变量无限接近某一定点 $x_0(x\to x_0)$ 时函数的极限

我们先来看一个例子.

讨论函数 $f(x)=x+1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 $x\to1$ 时函数值的变化趋势如何?

分别作 $f(x)=x+1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的图像如图 1-6 所示.

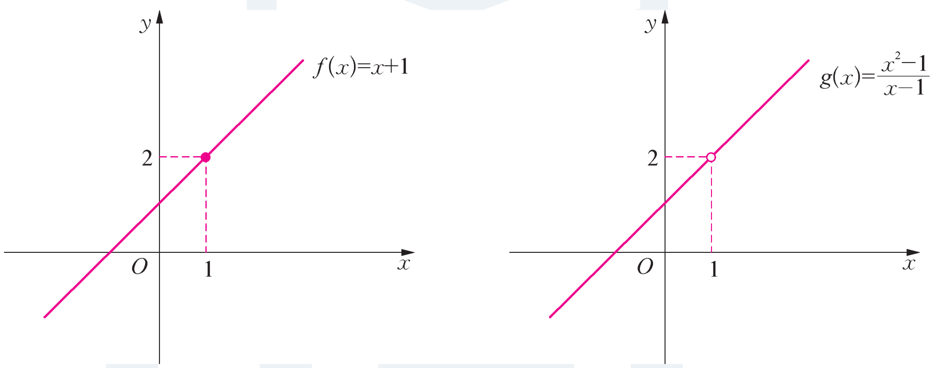


图 1-6

从图 1-6 可以看出，尽管 $f(x)=x+1$ 在点 $x=1$ 处有定义而 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 处无定义，但当 $x\to1$(只考虑 x 无限接近 1. 对实数来讲，在数轴上任何一个有限的范围内，都有无穷多个点，$x\to1$ 可实现)时，$f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的函数值都无限接近于 2，则

$$\lim_{x\to1}(x+1)=2;\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

对于这种当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势，给出下面的直观描述性定义.

定义 1.4 如果当 x 无限接近于定值 x_0，即 $x \to x_0$（x 可以不等于 x_0）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \qquad (\text{或当 } x \to x_0 \text{ 时}, f(x) \to A).$$

需要说明的是，在上面的定义中，我们假定函数 $f(x)$ 在 x_0 的左右近旁是有定义的；我们考虑的是当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的变化趋势，因此关键并不在于 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义.

我们能用定义 1.4，观察判断简单函数的极限.

例 2 求 $\lim\limits_{x \to -2}(x^2+1)$.

解 $\lim\limits_{x \to -2}(x^2+1) = (-2)^2+1 = 5.$

例 3 求 $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$.

解 $\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3}(x+1) = 4.$

3. 当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的左极限与右极限

我们前面讨论的 $x \to x_0$，x 既从 x_0 的左侧无限接近于 x_0（x 小于 x_0 而趋近于 x_0，记作 $x \to x_0^-$），也从 x_0 的右侧无限接近于 x_0（x 大于 x_0 而趋近于 x_0，记作 $x \to x_0^+$）.

有时我们仅需单侧讨论 x 的变化趋势，下面再给出当 $x \to x_0^-$ 或 $x \to x_0^+$ 时函数单侧极限的直观描述性定义.

定义 1.5 如果当 $x \to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记作

$$f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \qquad (\text{或当 } x \to x_0^- \text{ 时}, f(x) \to A).$$

如果当 $x \to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记作

$$f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \qquad (\text{或当 } x \to x_0^+ \text{ 时}, f(x) \to A).$$

左、右极限统称为函数 $f(x)$ 的单侧极限. 显然当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限存在的充分必要条件是：$f(x)$ 的左、右极限存在且相等，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

例 4 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限.

解 （1）因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$；

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0;$$

所以，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$；

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 1=1;$$

所以，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

讨论函数的极限，可以说自变量的变化趋势有两大类（$x\to x_0$，$x\to\infty$），细分有六小类（$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$），同一个函数在自变量不同的变化过程中，相应的函数变化趋势不一样，因而要注意区分.

习题 1.2

A

1. 观察如下数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 的变化趋势，写出它们的极限.

（1）$x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；　　（2）$x_n=\dfrac{1}{3}n$.

2. 根据数列或函数极限的定义判定如下极限是否存在.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

3. 求 $f(x)=|x|$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x-1, & x>1 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限.

B

1. 观察如下数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 的变化趋势，写出它们的极限.

（1）$x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$；　　（2）$x_n=n(-1)^n$.

2. 根据数列或函数极限的定义判定如下极限是否存在.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$；　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

3. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\phi(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限.

习题 1.2
参考答案

第三节 无穷大与无穷小

研究函数极限时，有两种变量非常重要：一种是在极限过程中函数的绝对值可以无限变大，而且要多大就有多大；一种是在极限过程中函数可以无限变小，而且要多小就有多小. 我们分别将它们称为无穷大和无穷小.

一、无穷大

我们先来看一个例子.

函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时，可知 $|f(x)|\to\infty$，我们把这种情况称为趋向无穷大，称函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时为无穷大量，记作

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty（表示为无穷大量，实际它没有极限的）.$$

定义 1.6 一般地，函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$ 的绝对值无限增大，那么函数 $f(x)$ 叫做当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大量，简称无穷大. 记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty.$$

例如，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$；$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$；$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

注:(1) 称一个函数 $f(x)$是无穷大,必须指明它在相对于自变量 x 的哪种变化趋势下是无穷大.

(2) 无穷大是一个绝对值无穷变大的变量,任何绝对值很大的常数都不是无穷大(例如 $b=10^{2018}$ 不是无穷大).

二、无穷小

实际问题中,我们经常遇到以零为极限的变量.例如,单摆离开铅直位置而摆动,由于空气阻力和机械摩擦力的作用,振幅逐渐减小并趋近于零.为此我们给出如下定义.

定义 1.7 设有函数 $f(x)$,如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$的极限为零,那么函数 $f(x)$叫做当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量,简称无穷小.

例如,因为 $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$,所以函数 $x-2$ 是当 $x\to 2$ 时的无穷小.

又如,因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注:(1) 无穷小是一个变化不定的变量,不是常量,只有 0 可作为无穷小量的唯一常量,因为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}0=0$.

(2) 无穷小是相对于某一个变化趋势的,称一个函数 $f(x)$ 是无穷小,必须指明它在相对于自变量 x 的哪种变化趋势下是无穷小.

例 1 自变量 x 在怎样的变化趋势下,下列函数为无穷小.

(1) $y=2x-10$; (2) $y=2^x$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 5}(2x-10)=0$,所以当 $x\to 5$ 时,$2x-10$ 为无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$,所以当 $x\to-\infty$ 时,2^x 为无穷小.

由定义不难知道,无穷大与无穷小互为倒数关系.因此当 $x\to 2$ 时,$x-2$ 是无穷小,则当 $x\to 2$ 时,$\dfrac{1}{x-2}$ 就是无穷大.

三、极限与无穷小之间的关系

我们由极限为零定义了无穷小,可知极限与无穷小之间有如下关系.

定理 1.1 如果函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时有极限 A,则 $f(x)-A$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量,反之亦成立(证明从略).

由上述定理可知,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,设 $a=f(x)-A$,则 $f(x)=A+a$,其中 a 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小,即极限存在的函数可写成其极限值与一个无穷小之和的形式.

例 2 当 $x\to\infty$ 时，将函数 $f(x)=\dfrac{x+5}{x}$ 写成其极限值与一个无穷小之和的形式.

解 因为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)=1,$$

而 $f(x)=\dfrac{x+5}{x}=1+\dfrac{5}{x}$ 中的 $\dfrac{5}{x}$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷小，所以 $f(x)=1+\dfrac{5}{x}$ 即为所求.

四、无穷小的运算性质

由无穷小的概念可知，无穷小应当满足如下运算性质.

性质 1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 2 有界函数与无穷小的积是无穷小.

性质 3 有限个无穷小的积仍是无穷小.

以上各性质证明从略.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 因为 $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$，其中 $\sin x$ 为有界函数，$\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小，所以由性质 2 可知，$\dfrac{\sin x}{x}$ 也为当 $x\to\infty$ 时的无穷小，那么

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

五、无穷小的比较

我们要通过讨论两个无穷小的商，对两个无穷小趋于零的快慢速度进行比较. 例如，当 $x\to0$ 时，x，$3x$ 与 x^2 都是无穷小，列下表 1 - 1 观察它们趋于零的快慢程度.

表 1 - 1

x	1	0.5	0.1	0.01	…	$\to0$
$3x$	3	1.5	0.3	0.03	…	$\to0$
x^2	1	0.25	0.01	0.000 1	…	$\to0$

当 $x \to 0$ 时，x^2 比 x 和 $3x$ 更快地趋于零，而 x 与 $3x$ 趋于零的快慢程度相当. 下面求它们中两个无穷小商的极限：

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{3x} = 0$，$x^2$ 比 $3x$ 更快地趋于零，可以说当 $x \to 0$ 时，x^2 是 $3x$ 的高阶无穷小.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$，$x$ 与 $3x$ 趋于零的快慢程度相当，可以说当 $x \to 0$ 时，x 与 $3x$ 是同阶无穷小.

定义 1.8 设 α，β 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小，且 β 在 $x \to x_0$ 时取值不为零：

(1) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$，则称 α 是 β 的高阶无穷小或 β 是 α 的低阶无穷小.

(2) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = c\ (c \neq 1)$，则称 α 和 β 是同阶无穷小.

(3) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$，则称 α 和 β 是等价无穷小，记作：$\alpha \sim \beta$（α 与 β 等价）.

例 4 当 $x \to -3$ 时，$x^2 + 6x + 9$ 与 $x + 3$ 都是无穷小，试比较之.

解 因为 $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)^2}{x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} (x + 3) = 0$，

所以 $x^2 + 6x + 9$ 是 $x + 3$ 的高阶无穷小.

习题 1.3

A

1. 当 x 趋于什么时，下列函数为无穷大？

(1) $y = \dfrac{1}{x^2}$；　　(2) $y = x - 1$.

2. 当 x 趋于什么时，下列函数为无穷小？

(1) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$；　　(2) $y = 3^x$.

3. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} (2x^3 - 1)$.

5. 当 $x \to 1$ 时，$1 - x$ 与 $\dfrac{1}{2}(1 - x^2)$ 都是无穷小，试比较之.

B

1. 当 x 趋于什么时，下列函数为无穷大？

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$；　　(2) $y=2^x$.

2. 当 x 趋于什么时，下列函数为无穷小？

(1) $y=x\cos\dfrac{1}{x}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$.

3. “无穷大必为无界的量”“无界的量必为无穷大”这两个命题对吗？请举例说明.

4. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x^5}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

5. 当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 与 $1-x^3$ 都是无穷小，试比较之.

习题 1.3
参考答案

第四节 函数极限的运算规则

要运用极限讨论函数，首先要会求函数的极限. 简单函数的极限可用极限定义观察判断得到，复杂的函数就要利用运算规则，化为若干个简单的函数来求极限. 中学阶段我们已经学习了数列极限的四则运算规则，因为数列可作为一类特殊的函数，故函数极限有与数列极限相类似的四则运算规则.

下面我们以 $x\to x_0$ 时函数的极限为例说明函数极限的运算规则，对于自变量 x 的其他变化过程，有完全类似的运算法则.

定理 1.2(函数极限的四则运算规则) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=AB$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

我们以定理 1.2 的法则(2)为例证明，其他法则证明从略.

证明 因 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则由极限与无穷小的关系(定理 1.1)，有

$$f(x)=A+\alpha,\qquad g(x)=B+\beta\ (\text{其中}\ \alpha,\beta\ \text{都是当}\ x\to x_0\ \text{时的无穷小}),$$

于是

$$f(x)g(x)=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta),$$

由无穷小的性质知 $A\beta+B\alpha+\alpha\beta$ 仍为无穷小，故再由极限与无穷小的关系(定理 1.1)，可推得

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=AB=\lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0} g(x),$$

得证.

由定理 1.2 的法则(2)可得如下两个推论.

推论 1 若 C 为常数，则 $\lim\limits_{x\to x_0} Cf(x)=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

推论 2 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n$（$n$ 为正整数).

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-4)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-4)=\lim\limits_{x\to 2} x^2+3\lim\limits_{x\to 2} x-4=2^2+3\times 2-4=6$.

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-7}{x^2+5}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)=6\neq 0$，所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-7}{x^2+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x-7)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5)}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$.

解 当 $x\to 3$ 时，分子、分母的极限都为零，不能应用定理 1.2 的法则(3). 但分子、分母都有公因式 $(x-3)$，故可先约去. 所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-4)}{(x-1)}=-\frac{1}{2}.$$

例 4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2}{x^2-4x+3}$.

解 当 $x\to 1$ 时，分子的极限不为零，分母的极限为零，可先求其倒数的极限，再应用无穷大量与无穷小量的关系得到结果. 由于

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x^2+2}=\frac{0}{3}=0,$$

即 $x\to 1$ 时 $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+2}$ 为无穷小，则其倒数 $\dfrac{x^2+2}{x^2-4x+3}$ 当 $x\to 1$ 时是无穷大，即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2}{x^2-4x+3}=\infty.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x-7}{6x^2-4x+3}$.

解 对有理函数 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x-7}{6x^2-4x+3}$，分子、分母中的最高次幂为 x^2，故先对分子、分母同除以 x^2 后，再利用极限的四则运算法则，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x-7}{6x^2-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}}{6-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}6-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}=\frac{5}{6}.$$

用同样方法，可得结果

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

习题 1.4

A

计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to -2}(3x^4-5x^2+x-6)$；

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2}{x-5}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

B

计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^3-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$；

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

习题 1.4
参考答案

第五节 两个重要极限

在一元函数微积分中，极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 有着重要的地位和作用，我们称之为两个重要极限.

一、极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

我们称极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 为第一个重要极限(证明从略).

列表 1-2 观察当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的变化趋势.

表 1-2

x	$\pm\dfrac{\pi}{4}$	$\pm\dfrac{\pi}{8}$	$\pm\dfrac{\pi}{16}$	$\cdots$	$\to 0$
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.900 316	0.974 496	0.993 587	$\cdots$	$\to 1$

由表 1-2 可见，当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$.

故有重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

例 1 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$.

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times 5 \xlongequal{u=5x} 5 \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 5 \times 1 = 5.$$

应用第一个重要极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 的结果求其他极限，要注意：

（1）所求极限呈现“$\dfrac{0}{0}$”性态，且与三角函数有关.

（2）可变形出现 $\lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{\sin \Delta}{\Delta}$ 的形式（Δ 代表统一变量），那么就有 $\lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{\sin \Delta}{\Delta} = 1$.

例 3 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{3x}{4x} \right) = \frac{3}{4} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sin 4x} = \frac{3}{4}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \left(\frac{x}{2} \right)^2}$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\lim_{\frac{x}{2} \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

二、极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

其中 e 为无理数，它的值为：e = 2.718 281 828 459 045….

列表 1－3、表 1－4，考察当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势.

表 1－3

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	…	$\to+\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2.25	2.705	2.717	2.718 1	2.718 27	…	$\to$ e

表 1－4

x	-10	-100	$-1\ 000$	$-10\ 000$	$-100\ 000$	…	$\to-\infty$
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.88	2.732	2.720	2.718 3	2.718 28	…	$\to$ e

可以看出，当 $x\to\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\to\mathrm{e}$.

故有重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，称之为第二个重要极限.

对这个重要极限也不要求证明，我们只需了解它的应用.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 令 $\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$，当 $x\to0$ 时，$t=\frac{1}{x}\to\infty$，故

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\mathrm{e},$$

即 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

我们称 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 为第二个重要极限的等价形式.

应用第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 的结果求其他极限，要注意：

（1）所求极限呈现“1^∞”性态.

（2）可变形出现 $\lim\limits_{\Delta\to\infty}\left(1+\frac{1}{\Delta}\right)^\Delta$ 或 $\lim\limits_{\Delta\to0}[1+\Delta]^{\frac{1}{\Delta}}$ 的形式（Δ 代表统一变量），那么就有

$$\lim_{\Delta\to\infty}\left(1+\frac{1}{\Delta}\right)^\Delta=\mathrm{e}\qquad 或\qquad \lim_{\Delta\to0}[1+\Delta]^{\frac{1}{\Delta}}=\mathrm{e}.$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}$$

$$=\left[\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}.$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}\cdot(-1)}$$

$$=\left\{\lim_{(-x)\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}}\right\}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}.$$

习题 1.5

A

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

B

1. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\beta x}{\sin\alpha x}(\alpha\neq 0)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{(\pi-x)^2}$.

2. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^x$.

习题 1.5
参考答案

第六节 函数的连续性

在自然界中有许多现象，如气温的变化、植物的生长等都是连续变化着的，即在很短的时间内，它们的变化都是很微小的. 这种现象在函数关系上的反映，就是函数的连续性.

函数的连续是函数的一种重要性态. 从几何角度看，函数的连续表现为连续函数的图形是一条连绵不断的曲线.

一、函数连续的概念

要使函数 $y=f(x)$ 的图形在点 x_0 处连续不断，即函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须同时满足以下三个条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

于是有如下定义.

定义 1.9　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

显然，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续又右连续.

例 1 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0, \\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=0$ 和 $x=1$ 处的连续性.

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2=0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x=0,$$
$$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0),$$

所以,函数 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

(2) 因为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 2x=2,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 1=1,$$

所以,当 $x\to 1$ 时,$f(x)$的极限不存在,$f(x)$在点 $x=1$ 处不连续.

若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内每一点处都连续,则说函数 $y=f(x)$ 在区间内连续.

例 2 讨论函数 $f(x)=2x+1$ 在其定义域内的连续性.

解 函数 $f(x)=2x+1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 任取一点 $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 因为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(2x+1)=2x_0+1=f(x_0),$$

所以函数 $f(x)=2x+1$ 在点 x_0 处连续,即在定义域$(-\infty,+\infty)$内每一点处都连续,我们就说 $f(x)=2x+1$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内连续.

在定义 1.9 中,若将 $\Delta x=x-x_0$ 叫做自变量增量(或改变量);则

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

叫做函数的增量(或改变量). 那么

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

可等价地表示为

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)-f(x_0)]=0,$$

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, 于是有连续的另一个定义.

定义 1.10 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其附近有定义,如果自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时,对应的函数增量也趋于零,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续.

定义 1.10 表明，函数 $y=f(x)$ 的连续性实质，反映的就是函数自变量的改变量无限小时，函数的改变量也无限小.

对于在闭区间 $[a, b]$ 上有定义的函数 $f(x)$，若 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点处连续，即 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续，若 $f(x)$ 又在 a 点右连续，b 点左连续，则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，也称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数. 连续函数的图像是一条连续而不间断的曲线(图 1-7).

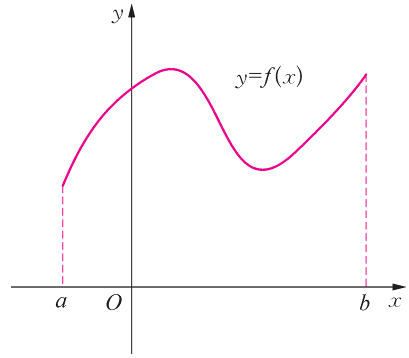


图 1-7

通过上面的学习，我们已经知道如何判断函数的连续性. 若函数在某一点处不连续，我们称之为间断函数，把不满足函数连续性的点称之为间断点，它包括如下三种情形：

(1) 在点 x_0 处无定义.

(2) 在 $x \to x_0$ 时无极限.

(3) 在 $x \to x_0$ 时有极限但不等于 $f(x_0)$.

例 3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 因为在点 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1 \neq f(0)=0$，所以点 $x=0$ 是间断点.

例 4 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x, & 1<x<2, \\ e^{-x}, & 2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$

讨论函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 和 $x=2$ 处的连续性，并画出函数图像.

解 因为

$$\lim_{x \to 1^-} f(x)=\lim_{x \to 1^-} x=1,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x)=\lim_{x \to 1^-}(2-x)=1,$$

又 $f(1)=1$，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续.

又因为

$$\lim_{x \to 2^-} f(x)=\lim_{x \to 2^-}(2-x)=0,$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x)=\lim_{x \to 2^+} e^{-x}=e^{-2}.$$

当 $x \to 2$ 时，函数 $f(x)$ 的极限不存在，故函数 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处不连续.

作函数 $f(x)$ 的图像如图 1-8 所示.

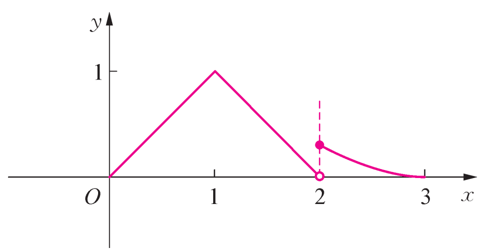


图 1-8

二、初等函数的连续性

定理 1.3 基本初等函数在它们的定义域内都是连续的；一切初等函数在其定义域内也都是连续的.（证明略）

根据定理 1.3，由连续的定义，还可通过如下方式求极限.

（1）求初等函数在定义域内趋向某点 x_0 的极限，就等于求该点的函数值，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

（2）求连续的复合函数的极限，极限符号“lim”与函数符号“f”可以交换顺序，也可作代换

$$\lim_{x\to x_0} f[\phi(x)]=\lim_{\mu\to a} f(u)，\text{其中 } u=\phi(x)，a=\lim_{x\to x_0}\phi(x).$$

例 5 求下列函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4-x^2}$；（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{5-\dfrac{\sin x}{x}}$.

解 （1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-0}=2$.

（2）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x)=\ln 1=0$.

（3）令 $u=\dfrac{\sin x}{x}$，则

$$\sqrt{5-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{5-u},$$

当 $x\to 0$ 时 $u=\dfrac{\sin x}{x}\to 1$，故

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{5-\frac{\sin x}{x}}=\lim_{u\to 1}\sqrt{5-u}=2.$$

三、闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数的如下定理.

定理 1.4(最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值

(在此不作证明).

例如：函数 $y=\sin x$ 在闭区间$[0,2\pi]$上连续，在点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处，它的函数值为1，且大于闭区间$[0,2\pi]$上其他各点的函数值；在点 $x=\dfrac{3\pi}{2}$ 处，它的函数值为-1，且小于闭区间$[0,2\pi]$上其他各点的函数值，故 $y=\sin x$ 在闭区间$[0,2\pi]$上有最大值 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，最小值 $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=-1$.

定理 1.5(介值定理) 在闭区间上连续的函数一定取得介于区间两端点的函数值间的任何值.

上述性质即：若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，μ 为介于 $f(a)$与 $f(b)$之间的数，则在(a,b)内至少有一个 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$，$\xi\in(a,b)$.

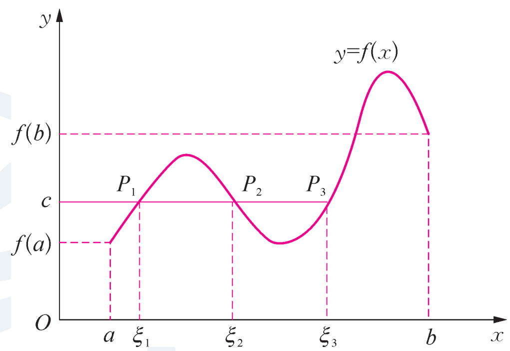


图 1-9

如图 1-9 所示，函数 $y=f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续，对于 $f(a)<c<f(b)$，在(a,b)内存在三点 ξ_1，ξ_2，ξ_3，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(\xi_3)=c$.

习题 1.6

A

1. 讨论下列函数在指定点处的连续性.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，在点 $x=2$ 处；

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1+x}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处.

2. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图像.

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x\leqslant 1;\\ -1, & x>1.\end{cases}$

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 - 2x + 9}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{10 - \dfrac{\sin x}{x}}$.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x + b, & x \geqslant 0, \\ x^2 + 1, & x < 0, \end{cases}$ 试选择 b，使 $f(x)$ 成为 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数.

B

1. 讨论下列函数在指定点处的连续性：

(1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - \dfrac{\sin x}{x}}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处；

(2) $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5x - 4} - \sqrt{x}}{x - 1}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 - 2x)}{x}$.

习题 1.6
参考答案

本 章 小 结

一、学习目标与要求

在进一步理解认识函数概念的基础上，本章学习目标的重点是掌握函数极限的概念、极限的四则运算法则、两个重要极限及求函数极限的一些基本方法，并了解函数的连续性. 具体要求如下：

1. 理解函数、分段函数、复合函数、初等函数等概念.
2. 理解函数极限的概念，无穷大与无穷小的概念.
3. 掌握极限的四则运算法则.
4. 认识两个重要极限及应用.
5. 了解函数连续性的概念，会讨论初等函数的连续性.

二、本章主要内容

1. 一个函数的构成要素为：定义域、对应关系和值域，其中定义域和对应关系叫做函数的两要素.

2. 函数的基本特性有：单调性、有界性、奇偶性、周期性.

3. 由基本初等函数与常数经过有限次的四则运算及有限次的函数复合所产生的，并且能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

4. 函数的极限，实质就是当自变量的某种变化趋势下（有两大类，即 $x \to x_0$，$x \to \infty$；六小类，即 $x \to x_0$，$x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to \infty$，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$），相应的函数变化趋势.

5. 极限的运算法则

设在自变量 x 的某一变化过程中，$\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$$

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B.$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0).$$

6. 无穷大与无穷小

(1) 有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

(2) 若 $\lim f(x) = 0$，$g(x)$ 是有界量，则 $\lim f(x)g(x) = 0$.

(3) 无穷小的比较：

设在同一极限过程中，α，β 为无穷小且 $\beta \neq 0$，则

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$，称 α 是 β 的高阶无穷小.

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$，称 α 是 β 的低阶无穷小.

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = c\ (c \neq 0)$，称 α 是 β 的同阶无穷小，特别地，若 $c = 1$，即若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$，则称 α 是 β 的等价无穷小.

(4) 无穷大与无穷小的关系：

若 $\lim f(x) = 0$，且 $f(x) \neq 0$，则 $\lim \dfrac{1}{f(x)} = \infty$.

若 $\lim f(x) = \infty$，则 $\lim \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

7. 重要极限公式

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\lim\limits_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

8. 计算函数极限的方法归纳

(1) 利用函数极限的定义观察判断.

(2) 利用极限的四则运算法则.

（3）利用无穷小与无穷大的运算规则.

（4）利用两个重要的极限公式.

（5）利用初等函数的连续性.

关于极限的计算，就是将一些基本初等函数的极限以及两个重要极限等作为已知条件，运用极限的运算法则求函数的极限.要注意的是法则成立的条件，当条件不满足时，就不能直接用，常常需要对函数通过适当的恒等变换：如因式分解后约分、分子与分母同乘共轭根式、通分、变量代换、三角恒等变换等，再利用有关方法计算极限.

9．函数的连续性

（1）函数连续的概念

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

（2）初等函数的连续性

一切初等函数在其有定义的区间内都连续.

在确定初等函数的连续区间时，只需考察函数的定义域.对分段函数，由于每一段上都是初等函数的形式，因此只需考察在分段点处的连续性.

（3）闭区间上连续函数的性质

主要掌握最大值和最小值定理、介值定理.

综合复习题一

A

1．填空题.

（1）$f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ 在区间________连续.

（2）若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+k}{x-2}=6$，则 $k=$________.

（3）设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x<0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=$________，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$________.

（4）如果 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=$________.

2．选择题.

（1）定义域为 **R**，下列函数中为有界函数的是（　　）.

A．e^x　　B．$1+\sin x$　　C．$\ln x$　　D．$\tan x$

（2）若某种商品的价格为 p，与需求量（即产量 Q）有关系式 $Q=50-4p$，则总收益函数 $R(Q)=$（　　）.

A. $4p+50p$　　B. $4p-50$　　C. $50p-4p^2$　　D. $50-4p$

(3) 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续是 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处有极限的(　　).

A. 充要条件　　B. 充分条件

C. 必要条件　　D. 无关条件

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases} 2, & x>0, \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x \leqslant 0 \end{cases}$,在点 $x=0$ 处间断是因为(　　).

A. $f(x)$ 在点 $x=0$ 处无定义

B. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 中有一个不存在

C. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 均存在,但 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

D. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(x)$

(5) 函数 $f(x)=\sin(x+1)(x^2-1)$ 的间断点的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x-2}{x^3-4x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2x}{x^2-4}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0} [\ln(1+x+x^2+x^3)-\ln(1+x)]\cos^2 x$.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x \leqslant 0, \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$ 的连续性,并作函数的图像.

B

1. 填空题.

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\arctan x+\mathrm{e}^{-x})=$________.

(2) $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{n}=$________.

(3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin x}{x}=$________.

(4) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\sin \dfrac{1}{x-1}=$________.

2. 选择题.

(1) 函数 $y=\sqrt{5-x}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ 的定义域是(　　).

A. $[1, 5]$　　B. $[1, 3)\cup(3, 5]$　　C. $[1, 3)$　　D. $(3, 5]$

(2) 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是(　　).

A. 无界奇函数　　B. 递减偶函数

C. 递减无界函数　　D. 递增无界函数

(3) 下列变量中,当 $x\to 0$ 时,与 $\sin 2x$ 等价的无穷小量是(　　).

A. x　　B. x^{2}　　C. $4x$　　D. $2x$

(4) $\lim\limits_{n\to 0}\left(\dfrac{1}{n^{2}}+\dfrac{2}{n^{2}}+\cdots+\dfrac{n}{n^{2}}\right)=($　　$)$.

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 0　　D. ∞

(5) 如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在 (a, b) 内(　　).

A. 一定 $f(x)=0$　　B. 一定 $f(x)\leqslant 0$

C. 不存在 ξ,使 $f(\xi)=0$　　D. 必存在 ξ,使 $f(\xi)=0$

3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^{2}+1}-\sqrt{n^{2}+5n}\right)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\arccos\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{x}$.

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\leqslant 0,\\ x^{2}+2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$ 的连续性,并作函数的图像.

综合复习题一
参考答案

阅读材料一

刘徽的割圆术

所谓"割圆术",是用圆内接正多边形的周长去无限逼近圆周并以此求取圆周率的方法.这个方法,是我国魏晋时期(约 225—295 年)的数学家刘徽,在批判总结了数学史上各

种旧的计算方法之后，经过深思熟虑后创造出来的一种崭新的方法.

中国古代从先秦时期开始，一直是取“周三径一”(即圆周周长与直径的比率为三比一)的数值来进行有关圆的计算. 但用这个数值进行计算的结果往往误差很大. 正如刘徽所说，用“周三径一”计算出来的圆周长，实际上不是圆的周长，而是圆内接正六边形的周长，其数值要比实际的圆周长小得多. 东汉的张衡不满足于这个结果，他从研究圆与它的外切正方形的关系着手得到圆周率. 这个数值比“周三径一”要好些，但刘徽认为其计算出来的圆周长必然要大于实际的圆周长，也不精确. 刘徽以极限思想为指导，提出用“割圆术”来求圆周率，既大胆创新，又严密论证，从而为圆周率的计算指出了一条科学的道路.

在刘徽看来，既然用“周三径一”计算出来的圆周长实际上是圆内接正六边形的周长，与圆周长相差很多；那么我们可以在圆内接正六边形把圆周等分为六条弧的基础上，再继续等分，把每段弧再一分为二，作出一个圆内接正十二边形，这个正十二边形的周长不就要比正六边形的周长更接近圆周了吗？如果把圆周再继续分割，作出一个圆内接正二十四边形，那么这个正二十四边形的周长必然又比正十二边形的周长更接近圆周. 这就表明，把圆周分割得越细，误差就越少，其内接正多边形的周长就越接近圆周. 如此不断地分割下去，一直到圆周无法再分割为止，也就是到了圆内接正多边形的边数无限多的时候，它的周长就与圆周“合体”而完全一致了，刘徽断言“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣”.

按照这样的思路，刘徽把圆内接正多边形的面积一直算到了正 3 072 边形，并由此而求得了圆周率为 3.14 和 3.141 6 这两个近似数值. 这个结果是当时世界上圆周率计算得到的最精确的数据. 刘徽对自己创造的这个“割圆术”新方法非常自信，把它推广到有关圆形计算的各个方面，从而使数学的发展大大向前推进了一步. 以后到了南北朝时期，祖冲之在刘徽的这一基础上继续努力，终于使圆周率计算精确到了小数点以后的第七位. 在西方，这个成绩是由法国数学家韦达于 1593 年取得的，比祖冲之要晚了 1 100 多年. 祖冲之还求得了圆周率的两个分数值，一个是“约率”，另一个是“密率”，其中的密率在西方是由德国人奥托于 1573 年得到的，1625 年发表于荷兰工程师安东尼斯的著作中，这比祖冲之晚了 1 000 多年. 刘徽所创立的“割圆术”对中国古代数学发展的重大贡献，历史是永远不会忘记的.

第二章 CHAPTER 2

导数与微分

微分学是微积分的重要组成部分，它的基本概念是导数与微分. 导数是反映函数相对于自变量变化快慢程度的概念，即变化率，如运动学中物体的运动速度、生物学中生物繁殖率等；微分反应当自变量有微小变化时，函数大约变化了多少，如时间间隔很短时物体走过的路程、生物繁殖数量的近似值等. 本章主要讨论导数与微分的概念及计算方法.

第一节 导数的概念

一、引例

1. 变速直线运动的瞬时速度

在物理学中，当物体作匀速直线运动时，其速度按如下公式计算：

$$速度=\frac{距离}{时间}.$$

但在实际问题中，运动往往是非匀速的，上述公式只能表示质点走完某一路程的平均速度，而不能准确地反映出质点在任意时刻运动的快慢. 质点在任意时刻运动的快慢程度即瞬时速度.

现设一质点作变速直线运动，以它的运动直线为数轴，则质点在数轴上的位置 s 是时间 t 的函数 $s=s(t)$，称之为位移函数. 现在我们来考察质

点在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$.

当时间 t 由 t_0 改变到 $t_0+\Delta t$ 时，质点经过的位移(图 2-1)为

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0),$$

则质点在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

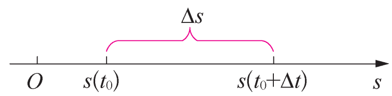


图 2-1

由于变速直线运动的速度通常是连续变化的，所以从整体来看，速度时刻在变化，但从局部来看，在很短的时间 Δt 内，速度变化不大，可以近似地看作是匀速的，因此当 $|\Delta t|$ 很小时，$\bar{v}$ 可作为质点在 t_0 时刻的瞬时速度的近似值. 显然，$|\Delta t|$ 越小，$\bar{v}$ 就越接近质点在 t_0 时刻的瞬时速度，当 $|\Delta t|$ 无限趋于零时，平均速度 $\bar{v}$ 的极限就是质点在 t_0 时刻的瞬时速度，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}. \tag{2-1}$$

例如，对于真空中自由下落的物体，它的运动方程为 $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$，其中 $g\approx 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ 为常量. 按照上述的讨论，有

$$\begin{aligned}v(t_0)&=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}g(2t_0+\Delta t)=gt_0,\end{aligned}$$

即在自由落体运动中，t_0 时刻的瞬时速度为 gt_0，这与高中物理学中自由落体运动的瞬时速度公式是一致的.

2. 平面曲线的切线及其斜率

在平面几何中，圆的切线被定义为“与圆只相交于一点的直线”. 而对一般曲线来说，这个定义显然不适用. 例如曲线 $y=x^2$ 上任一点处，都有无数条直线仅交 $y=x^2$ 于该点，但切线只有一条(如图 2-2 所示)；而图 2-3 中的直线虽然与曲线相交于两点，但仍是曲线的切线. 因此，有必要对曲线在一点处的切线给出一个普遍适用的定义.

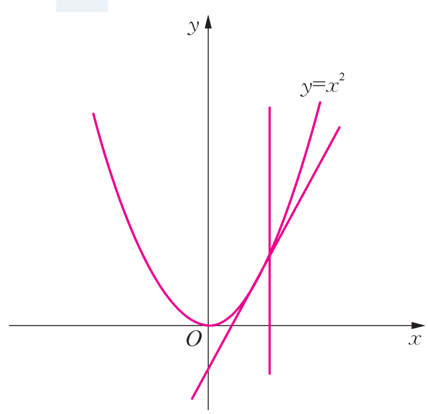


图 2-2

设点 M 是曲线 L 上一点(图 2-4)，在 L 上除点 M 外另取一点 N，作割线 MN. 当点 N 沿曲线 L

趋于点 M 时，割线 MN 绕点 M 转动而无限接近于它的极限位置 MT，则称直线 MT 为曲线 L 在点 M 处的切线. 现在我们来求切线 MT 的斜率.

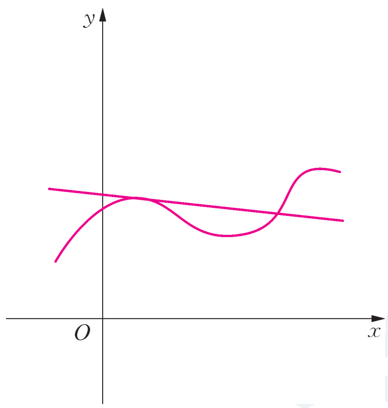


图 2-3

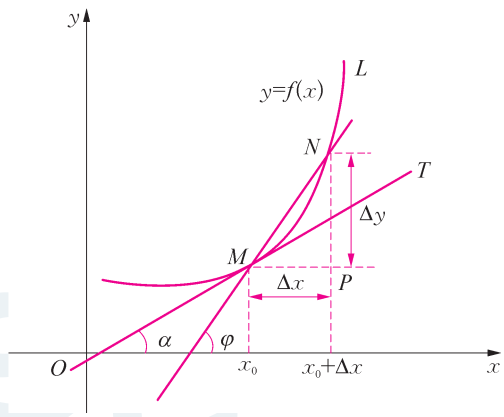


图 2-4

设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$，点 M 和 N 的横坐标分别为 x_0 和 $x_0+\Delta x$，则割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

其中 φ 是割线 MN 的倾角. 当点 N 沿曲线 L 趋于点 M（即 $\Delta x\to 0$）时，割线 MN 趋于切线 MT. 设切线 MT 的倾角为 α，那么，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\varphi\to\alpha$，$\tan\varphi\to\tan\alpha$，即割线 MN 的斜率的极限就是切线 MT 的斜率，即

$$k=\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2-2)$$

二、导数的概念

在以上两例中得出的关于瞬时速度的表达式(2-1)及切线斜率表达式(2-2)所反映的实际意义虽然不同，但它们在数量关系上具有共同的特性，在数学结构上具有完全相同的形式，即当自变量增量趋于零时函数的增量与自变量增量之比的极限. 在自然科学和工程技术等领域，还有许多其他反映变化率的量，如电流强度、线密度等都可归结为求上述形式的极限，我们舍弃这些例子的具体意义，抽象出共同的数学形式，就得出了函数导数的概念.

1. 导数的定义

定义 2.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处有增

量 Δx（$\Delta x \neq 0$，$x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地函数有增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作

$$f'(x_0),\ y'\big|_{x=x_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}\text{ 或 }\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2-3}$$

如果上述极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

为了方便起见，导数的定义式还可以写成以下形式：令 $\Delta x=h$，则(2-3)式变成

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};$$

若令 $x_0+\Delta x=x$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$，从而(2-3)式变成

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

根据导数的定义，变速直线运动的瞬时速度就是路程函数 $s=s(t)$ 在点 t_0 处的导数，即 $v(t_0)=s'(t_0)$；曲线 L 在点 $M(x_0,\ y_0)$ 处的切线斜率就是曲线方程 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，即 $k=\tan\alpha=f'(x_0)$.

例 1 设 $y=2x+1$，试求点 $x=5$ 处的导数 $y'\big|_{x=5}$.

试求导数

解 (1) 求增量 $\Delta y=f(5+\Delta x)-f(5)=2(5+\Delta x)+1-11=2\Delta x$；

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2$；

(3) 取极限 $y'\big|_{x=5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=2.$

连续与可导

2. 导函数

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内的每一处都可导，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $(a,\ b)$ 内可导. 这时对于区间 $(a,\ b)$ 中每一个 x 值，都有唯一确定的导数值 $f'(x)$ 与之对应，这样就确定了一个新的函数，称之为函数 $y=f(x)$ 的导函数，简称为导数，记作

$$f'(x),\ y',\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\text{ 或 }\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},$$

即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\qquad 或\qquad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

显然,函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$就是导函数 $f'(x)$在点 x_0 处的函数值,即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

三、求导举例

由导数的定义可知,求函数 $y=f(x)$ 的导数可分为以下三个步骤:

(1) 求增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$;

(3) 取极限 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

通常在运算熟练之后,我们可以将以上三个步骤合在一起来写.下面根据导数的定义求一些简单函数的导数(令 $\Delta x=h$).

例 2 求函数 $y=2x^2+1$ 的导数.

解

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[2(x+h)^2+1]-(2x^2+1)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{4hx+2h^2}{h}=4x,\end{aligned}$$

即

$$(2x^2+1)'=4x.$$

例 3 求幂函数 $y=x^n$(n 为正整数)的导数.

解

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right]=nx^{n-1},\end{aligned}$$

即

$$(x^n)'=nx^{n-1}(n\text{ 为正整数}).$$

一般地,对任何幂函数 $y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$),都有$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$($\mu\in\mathbf{R}$)(第三节将证).利用这个公式,有

$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$，$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$.

例 4　求函数 $y=\sin x$ 的导数.

解

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x,$$

即
$$(\sin x)' = \cos x.$$

用类似的方法可求得
$$(\cos x)' = -\sin x.$$

下面由此来验证第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

例 5　求对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 0$）的导数

解

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)\right] = \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\log_a \mathrm{e} = \frac{1}{x\ln a}$$

即
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，有 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

例 6　求函数 $f(x)=\sqrt[2\,017]{2\,018}$ 的导数.

解　$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt[2\,017]{2\,018}-\sqrt[2\,017]{2\,018}}{h} = 0$

一般地，对于函数 $f(x)=C$（C 为常数）来说，总有 $(C)'=0$，即任意常数的导数为零.

四、导数的几何意义

由前面的讨论可知，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 等于曲线 $y=f(x)$ 在

点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率，即 $k=\tan\alpha=f'(x_0)$，其中 α 为切线的倾角，这就是导数的几何意义，如图 2-4 所示.

根据导数的几何意义和直线的点斜式方程可知，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

若 $f'(x_0)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处具有垂直于 x 轴的切线 $x=x_0$；若 $f'(x_0)$ 不存在且不为无穷大，则曲线在点 $M(x_0, y_0)$ 处没有切线.

过点 $M(x_0, y_0)$ 且与该点切线垂直的直线称为曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的法线. 若 $f'(x_0)\neq 0$，则过点 $M(x_0, y_0)$ 的法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

导数的几何意义

而当 $f'(x_0)=0$ 时，过点 $M(x_0, y_0)$ 的法线为垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$.

顺便指出，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导，则落在区间 (a, b) 内的 $f(x)$ 的图像上每一点都有不垂直于 x 轴的切线，从而这段图像呈现为一段光滑的曲线，这对于直观地判断函数的可导性是很有帮助的.

例 7 求抛物线 $y=x^2$ 在点 $(2, 4)$ 处的切线方程和法线方程.

求公切线

解 由导数的几何意义知，抛物线 $y=x^2$ 在点 $(2, 4)$ 处的切线斜率为

$$y'\big|_{x=2}=2x\big|_{x=2}=2\times 2=4,$$

极坐标下求切线

所求的切线方程为 $$y-4=4(x-2),$$

即 $$y=4x-4;$$

法线方程为 $$y-4=-\frac{1}{4}(x-2),$$

即 $$y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}.$$

五、可导与连续的关系

1. 单侧导数

利用单侧极限，我们给出函数在某一点处的单侧导数的定义. 如果下面两极限

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称它们分别为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数，且分别记作 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$，也可分别记作 $f'(x_0 - 0)$ 和 $f'(x_0 + 0)$.

根据左、右极限与极限的关系，我们有下面的定理.

定理 2.1 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数都存在且相等，即 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

例 8 讨论函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处的连续性和可导性.

解 因为 $\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$，所以

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0,$$

因此 $y = |x|$ 在点 $x = 0$ 处连续，而

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

由于 $f'_+(0) \neq f'_-(0)$，所以函数 $y = |x|$ 在点 $x = 0$ 处不可导.

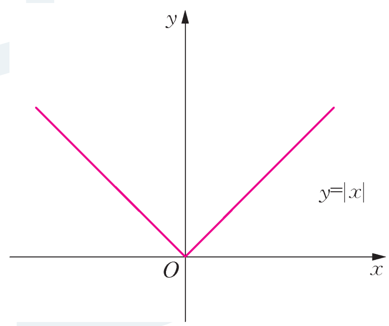


图 2－5

从图 2－5 上看，曲线 $y = |x|$ 在原点 O 处出现“尖点”，没有确定的切线.

2. 可导与连续

例 8 表明，一个函数在一点处连续未必在该点处可导. 但可以证明，可导则必然连续，即有以下定理.

定理 2.2 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $f(x)$ 一定在点 x_0 处连续.

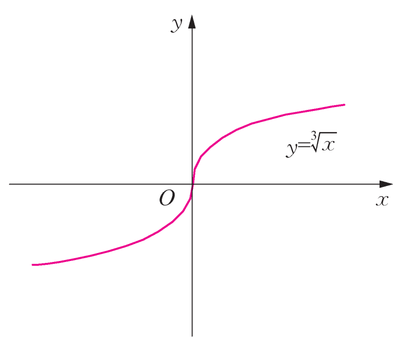


图 2－6

例 9 考察函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0)$，因此函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续. 又因为

分段函数的
连续性与可导性

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty,$$

所以 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在点 $x=0$ 处不可导. 从图形上看,曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点 O 处具有垂直于 x 轴的切线(图 2-6).

*六、变化率模型

对于一个未赋予具体含义的一般函数 $y=f(x)$ 来说,$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 表示自变量 x 在以 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 为端点的区间中每改变一个单位时,函数 y 的平均变化量,称为函数 $y=f(x)$ 在该区间中的平均变化率;把平均变化率当 $\Delta x\to 0$ 时的极限 $f'(x_0)$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的变化率,它反映了函数 y 随着自变量在点 x_0 处的变化而变化的快慢程度. 当然,当给函数赋予不同的实际背景时,这种变化率的模型也就具有不同的含义. 为了使读者加深对变化率概念的理解,同时展现它在科学技术中的广泛应用,我们在此列举几个变化率的应用案例.

例 10 电流模型.

设在 $[0, t]$ 这段时间内,通过导线横截面的电量为 $Q=Q(t)$,则从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 内通过导线横截面的电量为 $\Delta Q=Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)$,通过导线横截面的平均电流为

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t},$$

从而 t_0 时刻的瞬时电流为

$$i(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t_0+\Delta t)-Q(t_0)}{\Delta t}=Q'(t_0).$$

例 11 细杆的线密度模型.

将一根质量非均匀分布的细杆放置在 x 轴上,在 $[0, x]$ 上的质量 m 是关于 x 的函数 $m(x)$,则细杆上从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 这一段上的质量为 $\Delta m=m(x_0+\Delta x)-m(x_0)$,因此这一段上的平均线密度为

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x},$$

从而细杆上点 x_0 处的线密度为

$$\rho(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}=m'(x_0).$$

例 12 边际变量模型.

在经济管理中，边际是一个重要的概念，它是经济变量 $y=f(x)$ 关于自变量 x 在“边际上”的变化. 用 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示平均每单位 x 改变引起 y 的关于 x 的相对变化，而极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 则准确地反映了经济变量 y 关于 x 在“边际上”的变化率，它被称为边际经济变量. 可见边际经济变量就是经济变量 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$.

若用 $C=C(x)$ 表示总成本函数，则其边际成本函数就是 $C'=C'(x)$；若用 $R=R(x)$ 表示总收益函数，则其边际收益函数就是 $R'=R'(x)$；若用 $L=L(x)$ 表示总利润函数，则其边际利润函数就是 $L'=L'(x)$.

关于变化率模型的例子很多，如比热容、角速度、出生率等，我们不再一一列举，只是强调一点，即在建立导数形式的变化率模型时，所确立的函数最好是连续函数，否则建立的模型往往不能真实地反映客观事实.

习题 2.1

A

1. 利用导数定义求下列函数的导数.

   (1) $y=\cos x$；　　(2) $y=c$ (c 为常数).

2. 求下列函数的导数.

   (1) $y=x^5$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；

   (3) $y=\dfrac{1}{x^2}$；　　(4) $y=x^3\sqrt[5]{x}$；

   (5) $y=10^x$；　　(6) $y=\log_5 x$.

3. 一物体的运动方程为 $s=t^3$，求物体在 $t=2\mathrm{s}$ 时的速度.

4. 求曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程.

B

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \leqslant 1, \\ ax+b, & x>1, \end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续且可导，a，b 应取什么值？

2. 讨论 $y=|\sin x|$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

习题 2.1
参考答案

第二节 函数的和、差、积、商的求导法则

前面根据导数的定义，求出了部分基本初等函数的导数，但对于一般的函数，利用导数的定义求其导数往往很困难，甚至不能求解. 因此，本节和下节将介绍一些函数的求导法则，并介绍导数的基本公式，以此来解决初等函数的导数计算问题.

定理 2.3 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商(分母为零的点除外)都在点 x 处可导，且有如下求导法则：

(1) $(u \pm v)'=u' \pm v'$;

(2) $(uv)'=u'v+uv'$;

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v \neq 0)$.

下面只给出定理 2.3 的法则(2)的证明，定理 2.3 的法则(1)与(3)的证明从略.

证明 令 $y=u(x)v(x)$，给 x 以增量 Δx，相应地 $u(x)$，$v(x)$，$y(x)$ 各有增量

$$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x) \text{ 或 } u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u,$$

$$\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x) \text{ 或 } v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v,$$

$$\begin{aligned}\Delta y&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv\\&=v\Delta u+u\Delta v+\Delta u\Delta v,\end{aligned}$$

所以
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x \to 0$，对上式两端取极限得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right),$$

因为函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 处可导，则函数 $u=u(x)$ 在点 x 处连续，故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u',\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v',\ \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u=0.$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)v+u\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u \cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'v+uv',$$

即
$$(uv)'=u'v+uv'.$$

特别地，当 $v(x)=C$（C 为常数）时，由定理 2.3 的法则(2)可得如下推论.

推论 1 若 $v(x)=C$（C 为常数），则 $[Cu(x)]'=Cu'(x)$.

即求导数时，常数因子可以提到求导记号的外面.

特别地，当 $u(x)=1$，由定理 2.3 的法则(3)可得如下推论.

推论 2 若 $u(x)=1$，则 $\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)'=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$.

另外，定理 2.3 法则(1)与(2)可推广到有限多个可导函数的情形，例如
$$(u+v-w)'=u'+v'-w',$$
$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

例 1 已知 $f(x)=\log_5\sqrt{x}+3\cos x-e^x+\sin\dfrac{\pi}{3}$，求 $f'(x)$.

解
$$\begin{aligned}f'(x)&=(\log_5\sqrt{x})'+(3\cos x)'-(e^x)'+\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)'\\&=\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)'+3\cdot(\cos x)'-e^x+0\\&=\frac{1}{2x\ln 5}-3\sin x-e^x.\end{aligned}$$

例 2 求 $y=x^2\sin x$ 的导数.

解
$$\begin{aligned}y'&=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'\\&=2x\sin x+x^2\cos x.\end{aligned}$$

例 3 求 $y=\tan x$ 的导数.

解
$$\begin{aligned}y'&=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}\\&=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,\end{aligned}$$

即
$$(\tan x)'=\sec^2 x.$$

用类似的方法可得
$$(\cot x)'=-\csc^2 x.$$

例 4 求 $y=\sec x$ 的导数.

解

$$y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x,$$

即
$$(\sec x)'=\sec x\tan x.$$

用类似的方法得

$$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

例 5 设 $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$，求 $f'(x)$.

解

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(x\sin x)'(1+\cos x)-x\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{(\sin x+x\cos x)(1+\cos x)-x\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{\sin x(1+\cos x)+x(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin x+x}{1+\cos x}.\end{aligned}$$

例 6 在一个并联电路中，含有一个阻值为 3 Ω 的恒定电阻和一个阻值为 r 的可变电阻，求总电阻 R 对 r 的变化率.

解 在该串联电路中，总电阻 R 与 r 的关系为 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{r}$，由此可得

$$R=\frac{3r}{3+r},$$

故 R 对 r 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}=\left(\frac{3r}{3+r}\right)'=\frac{3(3+r)-3r}{(3+r)^2}=\frac{9}{(3+r)^2}.$$

习题 2.2

A

1. 证明.

(1) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；　　(2) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=\dfrac{4}{x^5}+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{2}{x}+12$；　　(2) $y=5x^3-2^x+3\mathrm{e}^x$；

(3) $y=2\tan x+\sec x-1$；　　(4) $y=\sin x\cos x$.

3. 求下列函数在给定点处的导数.

(1) $y=\sin x-\cos x$，求 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}$；

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\dfrac{1}{2}\cos\theta$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$；

(3) $f(x)=\dfrac{3}{5-x}+\dfrac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

4. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

B

1. 设 $f(x)=(1+x)(1+2x)\cdot\cdots\cdot(1+10x)$，求 $f'(0)$.

2. 求 $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$ 的导数.

习题 2.2 参考答案

第三节　复合函数的求导法则和反函数的导数

一、复合函数的求导法则

前面我们利用导数的四则运算法则和基本初等函数的导数公式求出了一些比较复杂的初等函数的导数. 但是产生初等函数的方法除了四则运算外，还有函数的复合运算. 因此必须学习掌握复合函数的求导法则. 不妨先讨论如下具体的问题.

引例　设 $y=\sin 2x$，求 y'.

解法一　由于 $y=\sin 2x=2\sin x\cos x$，所以

$$y'=(\sin 2x)'=2(\sin x)'\cdot\cos x+2(\cos x)'\cdot\sin x=2(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos 2x.$$

解法二　$y=\sin 2x$ 可看成是由 $y=\sin u$ 与 $u=2x$ 复合而成，从而

$$y'=y'(u)\cdot u'(x)=(\sin u)'\cdot(2x)'=\cos u\cdot 2=2\cos 2x.$$

可见对于这个具体的函数 $y=\sin 2x$，这两种解法的结果是一样的. 事实上解法二正是运用复合函数的求导法则来计算. 一般地，关于复合函数的求导，有下面的链式法则.

定理 2.4(链式法则)　如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，而函数 $y=f(u)$ 在对应点

u 处可导，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad 或 \quad \{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

证明 设当自变量 x 有改变量 Δx 时，对应函数 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 的改变量分别为 Δu 和 Δy. 由于 $y=f(u)$ 可导，即 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ 存在，故由无穷小与函数极限的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\alpha(\Delta u),$$

其中 $\alpha(\Delta u)$ 是当 $\Delta u\to 0$ 时的无穷小. 以 Δu 乘以上式两边，得

$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\Delta u+\alpha(\Delta u)\cdot\Delta u,$$

于是
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

因为 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，所以 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处也是连续的，故有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u=0,$$

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]\\&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\end{aligned}$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad 或 \quad \{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

上述法则说明，求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 对 x 的导数时，可先求出 $y=f(u)$ 对 u 的导数和 $u=\varphi(x)$ 对 x 的导数，然后相乘即可. 使用复合函数的求导法则时，关键在于弄清函数的复合关系，准确地将一个复合函数分解为几个简单函数的复合，由外向内，逐层求导后相乘，因此把这个法则形象地称为链式法则. 另外，复合函数的求导法则也可用于多次复合的情形，即可以推广到 y 含有多个中间变量的情形.

例如，设 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$ 都可导，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\qquad\text{或}\qquad y'=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x).$$

例 1 求 $y=\sin\sqrt{x}$ 的导数.

解 函数 $y=\sin\sqrt{x}$ 可看作由 $y=\sin u$ 与 $u=\sqrt{x}$ 复合而成,由链式法则得

$$y'=(\sin u)'(\sqrt{x})'=\cos u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

例 2 求函数 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 的导数.

解 此函数可看作由 $y=\ln u$, $u=\tan v$, $v=\dfrac{x}{2}$ 复合而成,因此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=(\ln u)'\cdot(\tan v)'\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{u}\cdot\sec^2 v\cdot\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{\tan\dfrac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sin x}=\csc x.\end{aligned}$$

对复合函数的分解与复合函数的求导法则比较熟练后,就可以不写出中间变量,只要认清函数的复合层次并默记在心,然后由外向内,逐层求导就可以了,关键是必须清楚每一步对哪个变量求导.

例 3 设 $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$,求 y'.

解

$$\begin{aligned}y'&=\left(2^{\sin^2\frac{1}{x}}\right)'=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\ln 2\cdot\left(\sin^2\frac{1}{x}\right)'=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\ln 2\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'\\&=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\ln 2\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=2^{\sin^2\frac{1}{x}}\ln 2\cdot\sin\frac{2}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=-\frac{\ln 2}{x^2}2^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{2}{x}.\end{aligned}$$

例 4 证明幂函数的导数公式 $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}(\mu\in\mathbf{R},\ x>0)$.

证明

$$(x^{\mu})'=(\mathrm{e}^{\mu\ln x})'=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)'=x^{\mu}\cdot\frac{\mu}{x}=\mu x^{\mu-1}.$$

* **例 5** 对电容器充电时,电容器电压的变化规律为 $u_C=E(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})(t>0)$,求电容器电压的变化速度.

解 求电容器电压的变化速度就是求电压对时间 t 的导数,所以

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=[E(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})]'=E\left[0-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\cdot\left(-\frac{t}{RC}\right)'\right]=\frac{E}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}},$$

即电容器电压的变化速度为 $\frac{E}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$.

***例 6** 如果将空气以 100 cm^3/s 的速率注入球状的气球,假定气体的压力不变,那么,当半径为 10 cm 时,气球半径增加的速率是多少?

解 设在 t 时刻气球的体积与半径分别为 V 和 r,显然

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3,\ r=r(t),$$

所以 V 通过中间变量 r 与时间 t 发生联系,是一个复合函数

$$V=\frac{4}{3}\pi[r(t)]^3.$$

由题意知,$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=100\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$,要求 $\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=10\ \mathrm{cm}}$ 的值.根据复合函数求导法则,得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{4}{3}\pi\times3[r(t)]^2\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=4\pi[r(t)]^2\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},$$

将已知数据代入上式,得

$$100=4\pi\times10^2\times\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},$$

所以 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4\pi}$ cm/s,即在 $r=10$ cm 这一瞬间,半径以 $\frac{1}{4\pi}$ cm/s 的速率增加.

二、反函数的导数

定理 2.5 如果函数 $x=\varphi(y)$ 在点 y 处单调可导,且 $\varphi'(y)\neq0$,那么它的反函数 $y=f(x)$ 在对应点 x 处可导,且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}\qquad 或\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

证明 由于 $x=\varphi(y)$ 单调连续,所以它的反函数 $y=f(x)$ 也单调连续,给 x 以增量

$\Delta x \neq 0$，由 $y=f(x)$ 的单调性可知 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq 0$，因而有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}},$$

根据 $y=f(x)$ 的连续性知，当 $\Delta x\to 0$ 时，必有 $\Delta y\to 0$. 而 $x=\varphi(y)$ 可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，于是上式两端取极限得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

定理 2.5 表明，反函数的导数等于直接函数导数的倒数. 下面借助于反函数的求导法则来导出几个反三角函数的导数公式.

例 7 求 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 因为 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数，$x=\sin y$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\cos y\neq 0$，所以

$$y'=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得
$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 8 求指数函数 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 因为 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 的反函数为 $x=\log_a y$，所以

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\dfrac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a,$$

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，有 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

三、基本初等函数的求导公式

前面已经求出了所有基本初等函数的导数，建立了函数的和、差、积、商的求导法则，

以及复合函数的求导法则，这样我们就基本解决了初等函数的求导问题. 为了便于查阅，我们将所有基本初等函数的求导公式归纳如下：

(1) $(C)'=0$ (C 为常数)；	(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$ ($\mu\in\mathbf{R}$)；
(3) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ ($a>0$，$a\neq 1$)；	(4) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；
(5) $(a^x)'=a^x\ln a$ ($a>0$，$a\neq 1$)；	(6) $(e^x)'=e^x$；
(7) $(\sin x)'=\cos x$；	(8) $(\cos x)'=-\sin x$；
(9) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$；	(10) $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$；
(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$；	(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；
(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；	(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；
(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；	(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

习题 2.3

A

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=1+\ln^2 x$；　　(2) $y=\sqrt{1+x^2}$；

(3) $y=(2x-5)^6$；　　(4) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$；

(5) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$.

2. 求下列函数在指定点处的导数值.

(1) $y=e^{2x}+x^2$，$x=0$；　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，$x=1$.

B

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$；　　(2) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$；

(3) $y=\ln[\ln(\ln x)]$；　　(4) $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

2. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$，试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

3. 设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

(1) $y=f(x^2)$；　　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

习题 2.3
参考答案

第四节 高阶导数

我们知道，变速直线运动的速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数，即 $v=\dfrac{ds}{dt}$，而加速度 a 等于速度函数 v 对时间 t 的导数，即 $a=\dfrac{dv}{dt}$，所以

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) \qquad \text{或} \qquad a=v'=[s'(t)]'.$$

这种导数的导数 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)$ 或 $[s'(t)]'$ 叫做 s 对 t 的二阶导数，记作 $\dfrac{d^2 s}{dt^2}$ 或 $s''(t)$，所以物体运动的加速度就是位置函数 s 对时间 t 的二阶导数，即 $a=s''(t)$.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，就称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的二阶导数，记作 y''，$f''(x)$，$\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$，即

$$y''=(y')' \qquad \text{或} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

类似地，二阶导数的导数叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数，……，一般地，函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数叫做函数 $f(x)$ 的 n 阶导数，分别记作

$$y''',\ y^{(4)},\ \cdots,\ y^{(n)}; \qquad f'''(x),\ f^{(4)}(x),\ \cdots,\ f^{(n)}(x);$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3},\ \frac{d^4 y}{dx^4},\ \cdots,\ \frac{d^n y}{dx^n} \qquad \text{或} \qquad \frac{d^3 f}{dx^3},\ \frac{d^4 f}{dx^4},\ \cdots,\ \frac{d^n f}{dx^n},$$

且有 $$y^{(n)}=[y^{(n-1)}]' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.相应地,把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$叫做函数 $f(x)$的一阶导数.显然,求高阶导数并不需要引入新的公式和法则,只需用一阶导数的公式和法则逐阶求导,直到所要求的阶数,所以仍可沿用前面学过的求导方法来计算高阶导数.

例 1 求函数 $y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 的二阶导数.

解

$$y'=-\mathrm{e}^{-x}\cos x+\mathrm{e}^{-x}(-\sin x)=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x),$$
$$y''=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)-\mathrm{e}^{-x}(-\sin x+\cos x)=2\mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

例 2 求 n 次多项式 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的各阶导数.

解

$$y'=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1},$$
$$y''=n(n-1)a_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+\cdots+2a_{n-2},$$

可见每经过一次求导运算,多项式的次数就降低一次,继续求导得

$$y^{(n)}=n!\ a_0.$$

这是一个常数,因而 $y^{(n+1)}=y^{(n+2)}=\cdots=0$,即 n 次多项式的一切高于 n 阶的导数都是零.

例 3 求指数函数 $y=a^x$ 的 n 阶导数.

解 $y'=a^x\ln a$,$y''=a^x\ln^2 a$,$y'''=a^x\ln^3 a$,依此类推,得 $y^{(n)}=a^x\ln^n a$,即

$$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a. \tag{2-4}$$

特别地, $$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x.$$

例 4 设 $y=\sin x$,求 $y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

一般地,可以得到 $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$,即

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ n\in\mathbf{Z}. \tag{2-5}$$

同理可得，
$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ n\in\mathbf{Z}. \tag{2-6}$$

式(2-4)、式(2-5)、式(2-6)可视作相应函数的 n 阶导数公式，利用这些公式可以直接求出该函数的任意阶导数，而不必连续多次求导. 例如由式(2-5)，可得

$$(\sin x)^{(2\,018)}=\sin\left(x+2\,018\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.$$

习题 2.4

A

求函数的二阶导数.

(1) $y=2x^2+\ln x$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{2x-1}$；

(3) $y=x\cos x$；　　(4) $y=\mathrm{e}^{-t}\sin t$；

(5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；　　(6) $y=\ln(1-x^2)$；

(7) $y=\tan x$；　　(8) $y=\dfrac{1}{x^3+1}$.

B

1. 求函数的二阶导数.

(1) $y=(1+x^2)\arctan x$；　　(2) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$；

(3) $y=x\mathrm{e}^{x^2}$；　　(4) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2. 求下列函数的 n 阶导数的一般表达式.

(1) $y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$($a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都是常数)；

(2) $y=\sin^2 x$；　(3) $y=x\ln x$；　(4) $y=x\mathrm{e}^x$.

3. 已知物体的运动规律为 $s=A\sin\omega t$(A,ω 是常数)，求物体运动的加速度，并验证：

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 s=0.$$

4. 验证函数 $y=C_1\mathrm{e}^{\lambda x}+C_2\mathrm{e}^{-\lambda x}$($\lambda,C_1,C_2$ 是常数)满足关系式 $y''-\lambda^2 y=0$.

习题 2.4
参考答案

*第五节 隐函数的导数与参数方程所确定的函数的导数

一、隐函数求导法则

前面我们所遇到的函数都是 $y=f(x)$ 的形式，即因变量 y 可由含有自变量 x 的数学式子直接表示出来，这样的函数叫做显函数. 但在实际问题中，常常会遇到利用方程表示函数关系的情形，如 $x^2+y^2=R^2$，$\mathrm{e}^{x+y}-xy=0$ 等. 像这样由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数叫做隐函数.

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化. 例如，由方程 $x^2+y^3-1=0$ 可以解出 $y=\sqrt[3]{1-x^2}$，但有的隐函数不易显化，甚至不可能显化. 例如，由方程 $\mathrm{e}^{x+y}-xy=0$ 所确定的隐函数就不能用显函数表示出来. 因此对于隐函数求导不能完全寄希望于把它显化，而是要想办法从 $F(x,y)=0$ 直接把导数求出来.

我们知道，把方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 代入原方程，结果是恒等式，即

$$F[x,f(x)]=0.$$

把这个恒等式的两端对 x 求导，所得的结果也必然相等，但应注意 y 是 x 的函数，要用复合函数的求导法则去求导，这样便可得到一个含有 y' 的方程，解出 y' 就得到所求隐函数的导数. 下面举例说明隐函数求导法则.

例 1 求由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$ 所确定的隐函数的导数 y'.

解 将方程两端同时对 x 求导，记住 y 是关于 x 的函数，由复合函数的求导法则得

$$y+xy'-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y y'=0,$$

由上式解出 y'，便得隐函数的导数为

$$y'=\frac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}\ (x+\mathrm{e}^y\neq 0).$$

注： 在 y' 的表达式中一般同时含有 x 和 y，其中的 y 是由所给方程所确定的隐函数.

例 2 求椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 在点 $(\sqrt{2},2\sqrt{2})$ 处的切线方程.

解 方程两边对 x 求导，得 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{8}y'=0$，所以

$$y' = -\frac{4x}{y}\ (y \neq 0),\ y'|_{(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})} = -2.$$

因而所求切线方程为 $$y - 2\sqrt{2} = -2(x - \sqrt{2}),$$

即 $$2x + y - 4\sqrt{2} = 0.$$

二、参数方程所确定的函数的求导法则

前面我们讨论了由 $y = f(x)$ 或 $F(x, y) = 0$ 给出的函数关系的求导问题，但有时会遇到 y 与 x 之间由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}(t\ 为参数)$$

所确定的函数关系，称此函数为参数式函数.

对于参数式函数，通常并不需要由参数方程消去参数 t，化为 y 与 x 之间的直接函数关系再求导. 下面根据复合函数与反函数的求导法则来推导参数式函数的求导法则.

如果函数 $x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$ 都可导，且 $\varphi'(t) \neq 0$，又 $x = \varphi(t)$ 具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$，则该参数式函数可以看成是由 $y = \psi(t)$ 与 $t = \varphi^{-1}(x)$ 复合而成的复合函数，根据复合函数与反函数的求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例 3 求摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

(1) 在任意点处的切线斜率；

(2) 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程与法线方程.

解 (1) 由导数的几何意义及知，摆线在任意点处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \cot\frac{t}{2};$$

(2) 当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时，摆线上对应点的坐标为 $\left(\frac{a\pi}{2} - a,\ a\right)$，在此点处的切线斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \left.\cot\frac{t}{2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = 1,$$

参数方程所确定的函数求导

从而切线方程为 $$y-a=x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

即 $$y=x+a\left(2-\frac{\pi}{2}\right);$$

法线方程为 $$y-a=-x+a\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

即 $$y=-x+\frac{\pi a}{2}.$$

习题 2.5

A

1. 求由下列方程所确定的隐函数 y 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $y^2-2xy+9=0$；　　(2) $x^3+y^3-3axy=0$；

(3) $xy=\mathrm{e}^{x+y}$；　　(4) $y=1-x\mathrm{e}^y$.

2. 求由下列参数方程所确定的函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta),\\ y=\theta\cos\theta.\end{cases}$

B

1. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

2. 设参数方程为 $f(x)=\begin{cases}x=3t^2+2t+3,\\ \mathrm{e}^y\sin t-y+1=0,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\ \left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x}\right|_{t=0}$.

3. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程.

(1) $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos 2t,\end{cases}$ 在点 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处；

(2) $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^2},\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2},\end{cases}$ 在点 $t=2$ 处.

习题 2.5 参考答案

第六节 微分的概念

导数表示函数相对于自变量的变化快慢程度，在实际问题中往往会遇到与其相关的另一类问题：当自变量作微小变化时，计算函数的改变量 Δy. 由于 Δy 的表达式往往很复杂，计算其精确值很困难，而在实际应用中，只要求在保证一定精确度的情况下计算 Δy 的近似值，由此引出微分学中的另一个基本概念——微分.

一、微分的定义

实例（金属薄片面积的改变量） 如图 2－7 所示，一块正方形金属薄片受温度变化影响时，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$，问此薄片的面积改变了多少？

解 设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 $A=x^2$. 薄片受温度变化影响时，面积的改变量可以看成是当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时，函数 A 相应的增量 ΔA，即

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

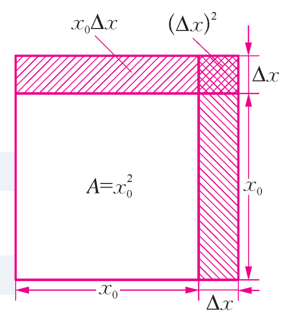


图 2－7

在上式中，ΔA 由两部分组成：第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，称为 ΔA 的线性主部（图 2－7 中两个长方形阴影部分面积之和）；第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小量（图 2－7 中小正方形阴影部分面积），即

$$\Delta A=2x_0\Delta x+o(\Delta x).$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，$(\Delta x)^2$ 可以忽略不计，面积增量 ΔA 可以近似地用 $2x_0\Delta x$ 表示，即

$$\Delta A\approx 2x_0\Delta x.$$

在数学上把 ΔA 的线性主部 $2x_0\Delta x$ 称为面积函数 $A=x^2$ 在点 x_0 处的微分. 一般地，函数 $y=f(x)$ 的微分定义如下.

定义 2.2 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 与 Δx 无关，$o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小量，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，

并称其线性主部 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x.$$

上述关于可微及微分的定义非常抽象，用定义 2.2 判断一个具体函数的可微性很不方便，特别是定义式中的常数 A 究竟与什么有关？通过下面的关于微分与导数关系的讨论，我们将对函数的微分有更明确的认识.

定理 2.6 设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，则函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，且 $f'(x)=A$. 反之，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x 处可微.

证明 (1) 必要性 设 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，则有 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A+0=A.$$

所以函数 $f(x)$在点 x 处可导，且 $f'(x)=A$.

(2) 充分性 设 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，即极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ 存在，由函数极限与无穷小的关系得 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$，其中 α 是 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，于是

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

显然，$\alpha\Delta x=o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$，且 $f'(x)$ 不依赖于 Δx，所以由微分的定义可知，函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微.

定理 2.6 说明，函数 $f(x)$在点 x 处可导与可微是等价的，且由定理必要性的证明可知，当函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微时，其微分可表示为

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x.$$

如果函数为 $y=x$，则函数的微分 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=x'\Delta x=\Delta x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$. 因此我们规定：自变量的微分等于自变量的增量. 于是函数 $y=f(x)$ 的微分又可以写成

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

在上式两边同除以 $\mathrm{d}x$，有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$. 由此可见，导数等于函数的微分与自变量的微分之商，这也就是在第一节中为什么把导数记作$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的道理，从此我们可以把记号$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$理解为两个微分之商，因此导数也称为“微商”.

应当注意，微分与导数虽然有着密切的联系，但它们具有本质上的区别：导数是函数

在某一点处的变化率，而微分是函数在某一点处由自变量增量所引起的函数变化量的主要部分；导数的值只与 x 有关，而微分的值与 x 和 Δx 都有关.

例 1 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$，$\Delta x=0.1$ 时的改变量及微分.

解 函数的改变量为

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=1.1^2-1^2=0.21.$$

在点 $x=1$ 处，$y'|_{x=1}=2x|_{x=1}=2$，所以函数的微分 $\mathrm{d}y=y'\Delta x=2\times 0.1=0.2$.

例 2 求函数 $y=2x^5+\ln x$ 的微分.

解 求导 $y'=(2x^5+\ln x)'=10x^4+\dfrac{1}{x}$，

所求微分
$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\left(10x^4+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

二、微分的几何意义

为了对微分有比较直观的了解，我们来说明微分的几何意义.

如图 2－8 所示，点 $M(x_0, y_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上一点，当自变量 x 有微小改变量 Δx 时，得到曲线上另一点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，于是

$$MQ=\Delta x, QN=\Delta y.$$

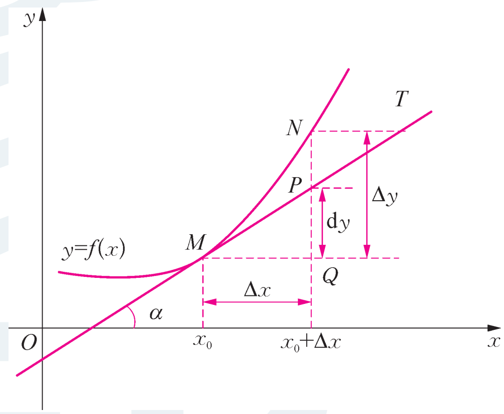


图 2－8

过点 M 作曲线的切线 MT，其倾角为 α，则

$$QP=MQ\cdot\tan\alpha=f'(x_0)\Delta x，即\ \mathrm{d}y=QP.$$

由此可知，微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 是当 x 有改变量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处切线的纵坐标改变量. 用 $\mathrm{d}y$ 近似代替 Δy 就是用点 $M(x_0, y_0)$ 处切线的纵坐标改变量 QP 来近似代替曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标的改变量 QN，并且有 $|\Delta y-\mathrm{d}y|=PN$.

微分的几何意义

习题 2.6

A

1. 已知 $y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1，0.1，0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

2. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立.

(1) d(　　) $=2\mathrm{d}x$;　　(2) d(　　) $=3x\,\mathrm{d}x$;

(3) d(　　) $=\cos t\,\mathrm{d}t$;　　(4) d(　　) $=\sin\omega x\,\mathrm{d}x$;

(5) d(　　) $=\dfrac{1}{x+1}\mathrm{d}x$;　　(6) d(　　) $=\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$;

(7) d(　　) $=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　(8) d(　　) $=\sec^2 3x\,\mathrm{d}x$.

3. 求下列函数的微分.

(1) $y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$;　　(2) $y=x\sin 2x$;

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;　　(4) $y=\ln^2(1-x)$;

(5) $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$.

B

1. 求下列函数的微分.

(1) $y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$;　　(2) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

(3) $y=\tan^2(1+2x^2)$;　　(4) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(5) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ (A, ω, φ 是常数).

2. 求下列函数的微分.

(1) $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{x+\sqrt{\ln x}}}$;

(2) $y=\left(\sin\dfrac{x}{1+x}\right)^{\ln(1+x)}$.

习题 2.6
参考答案

第七节 微分的运算及应用

一、微分的运算法则

因为函数 $y=f(x)$ 的微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$,所以根据求导公式和导数运算法则,就能

直接得到相应的微分公式和微分运算法则. 为了便于查找和记忆，列举如下.

1. 微分基本公式

(1) $d(C)=0$ (C 为常数)；	(2) $d(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}dx$ ($\mu\in\mathbf{R}$)；
(3) $d(\sin x)=\cos x\,dx$；	(4) $d(\cos x)=-\sin x\,dx$；
(5) $d(\tan x)=\sec^2 x\,dx$；	(6) $d(\cot x)=-\csc^2 x\,dx$；
(7) $d(\sec x)=\sec x\tan x\,dx$；	(8) $d(\csc x)=-\csc x\cot x\,dx$；
(9) $d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$ ($a>0$, $a\neq 1$)；	(10) $d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$；
(11) $d(a^x)=a^x\ln a\,dx$ ($a>0$, $a\neq 1$)；	(12) $d(e^x)=e^x\,dx$；
(13) $d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；	(14) $d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；
(15) $d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$；	(16) $d(\text{arccot}\, x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

2. 函数的和、差、积、商的微分运算法则(其中 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 可微)

(1) $d(u\pm v)=du\pm dv$；	(2) $d(uv)=v\,du+u\,dv$；
(3) $d(Cu)=C\,du$ (C 为常数)；	(4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,du-u\,dv}{v^2}$ ($v\neq 0$).

3. 复合函数的微分法则

根据微分的定义可知，当 u 是自变量时，函数 $y=f(u)$ 的微分是

$$dy=f'(u)du;$$

如果 u 不是自变量，而是关于 x 的可导函数 $u=\varphi(x)$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的导数为 $y'=f'(u)\varphi'(x)$. 于是复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy=f'(u)\varphi'(x)dx=f'(u)d\varphi(x)=f'(u)du.$$

由此可见，不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分总保持同一形式：$dy=f'(u)du$，这个性质称为一阶微分形式不变性. 有时利用一阶微分形式不变性求复合函数的微分比较方便.

例 1 设 $y=\cos\sqrt{x}$，求 dy.

解法 1 由公式 $dy=f'(x)dx$，得 $dy=(\cos\sqrt{x})'dx=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,dx$.

解法 2 由一阶微分形式不变性，得

$$dy = d(\cos\sqrt{x}) = -\sin\sqrt{x}\, d\sqrt{x} = -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}\, dx.$$

例 2 设 $y = e^{\sin x}$，求 dy.

解法 1 由公式 $dy = f'(x)dx$，得

$$dy = (e^{\sin x})' dx = e^{\sin x} \cos x\, dx.$$

解法 2 由一阶微分形式不变性，得

$$dy = de^{\sin x} = e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \cos x\, dx.$$

例 3 求由方程 $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$ 确定的隐函数 $y = f(x)$ 的微分及导数.

解 对方程两边求微分，得

$$2x\, dx + 2(y\, dx + x\, dy) - 2y\, dy = 0,$$

即

$$(x + y) dx = (y - x) dy,$$

所以

$$dy = \frac{y + x}{y - x} dx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + x}{y - x}.$$

例 4 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 确定的函数 $y = f(x)$ 的一阶及二阶导数.

解 因为 $dx = -3a\cos^2 t \sin t\, dt$，$dy = 3a\sin^2 t \cos t\, dt$，所以利用微商得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2 t \cos t\, dt}{-3a\cos^2 t \sin t\, dt} = -\tan t,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d(-\tan t)}{dx} = \frac{-\sec^2 t\, dt}{-3a\cos^2 t \sin t\, dt} = \frac{1}{3a\sin t \cos^4 t}.$$

二、微分在近似计算中的应用

由微分的定义可知，当 $f'(x) \neq 0$ 且 $|\Delta x|$ 很小时，用 dy 近似代替 Δy 所引起的误差是比 Δx 高阶的无穷小，从而有近似公式

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x, \tag{2-7}$$

或

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \tag{2-8}$$

上式中，若令 $x_0 + \Delta x = x$，则有

$$f(x) \approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{2-9}$$

特别地，当 $x_0=0$ 且 $|x|$ 很小时，

$$f(x) \approx f(0)+f'(0)x. \tag{2-10}$$

式(2－7)可以用于求函数增量的近似值，而式(2－8)、(2－9)、(2－10)可用来求函数值的近似值. 当$|x|$很小时，应用式(2－10)可以推得函数 $f(x)$在点 $x=0$ 附近的一些常用近似公式：

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$；	(2) $e^x \approx 1+x$；
(3) $\ln(1+x) \approx x$；	(4) $\sin x \approx x$（x 用弧度作单位）；
(5) $\tan x \approx x$（x 用弧度作单位）；	(6) $\arctan x \approx x$（x 用弧度作单位）.

证明　(1) 取 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$，则 $f(0)=1$，$f'(0)=\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0}=\frac{1}{n}$，代入式(2－10)得 $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$.

(2) 取 $f(x)=e^x$，则 $f(0)=1$，$f'(0)=(e^x)'|_{x=0}=1$，代入式(2－10)，得

$$e^x \approx 1+x.$$

其他几个公式也可用类似的方法证明，这里从略.

例 5　计算 arctan 1.05 的近似值.

解　设 $f(x)=\arctan x$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，由式(2－8)，有

$$\arctan(x_0+\Delta x) \approx \arctan x_0+\frac{1}{1+x_0^2}\Delta x,$$

取 $x_0=1$，$\Delta x=0.05$，则有

$$\arctan 1.05=\arctan(1+0.05) \approx \arctan 1+\frac{1}{1+1^2}\times 0.05=\frac{\pi}{4}+\frac{0.05}{2} \approx 0.810.$$

例 6　计算$\sqrt[3]{65}$的近似值.

解　因为 $\sqrt[3]{65}=\sqrt[3]{64+1}=\sqrt[3]{64\left(1+\frac{1}{64}\right)}=4\sqrt[3]{1+\frac{1}{64}}$，由近似公式(1)得

$$\sqrt[3]{65}=4\sqrt[3]{1+\frac{1}{64}} \approx 4\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{64}\right)=4+\frac{1}{48} \approx 4.021.$$

习题 2.7

A

1. 如图 2-9 所示的电缆 $\overset{\frown}{AOB}$ 的长为 s，跨度为 $2l$，电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f，则电缆长可按下面公式计算.

$$s=2l\left(1+\frac{2f^2}{3l^2}\right),$$

当 f 变化了 Δf 时，电缆长的变化约为多少？

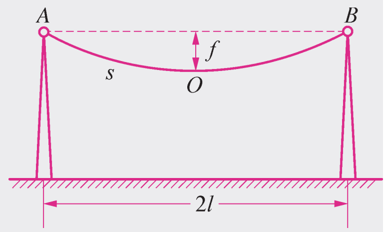


图 2-9

2. 计算下列三角函数值的近似值.

(1) $\cos 29°$；　　(2) $\tan 136°$.

3. 计算下列反三角函数值的近似值.

(1) $\arcsin 0.500\,2$；　　(2) $\arccos 0.499\,5$.

4. 计算下列各根式的近似值.

(1) $\sqrt[3]{996}$；　　(2) $\sqrt[6]{65}$.

B

1. 当 $|x|$ 较小时，证明下列近似公式.

(1) $\tan x\approx x$（x 用弧度作单位）；　　(2) $\ln(1+x)\approx x$；

(3) $\dfrac{1}{1+x}\approx 1-x$.

2. 计算 $\tan 45'$ 和 $\ln 1.002$ 的近似值.

3. 求函数 $y=x\sin x\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{\ln x\cdot\sqrt{x^2+2}}}$ 的微分.

习题 2.7
参考答案

本 章 小 结

一、学习目标与要求

1. 掌握导数的定义；理解导数的实质，掌握导数的几何意义；会用导数的定义求简单函数的导数.

2. 掌握导数的求导法则、基本初等函数的导数公式；掌握复合函数的各种求导技巧；会求简单函数的高阶导数.

3. 了解微分的概念、微分的几何意义；掌握函数求微分的两种方法及微分在求函数的增量与近似计算中的应用.

4. 了解可导、可微、连续之间的关系.

二、本章主要内容

1. 函数的导数

(1) 导数定义

导数 $f'(x)$的定义一般可以用下面两种形式的极限来表述：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\qquad 或 \qquad f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

在这里要注意 $f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$与导函数 $f'(x)$的区别与联系，即 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

由于导数定义是一种固定形式的极限，因此当用定义来求导数时，必然遇到：

① $x+\Delta x<0$ 且 $\Delta x\to 0$，即 $x\to 0^-$；

② $x+\Delta x>0$ 且 $\Delta x\to 0$，即 $x\to 0^+$.

由此产生了左、右导数的概念和重要结论.

$$左导数\ f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

$$右导数\ f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

重要结论：$y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f'_-(x)=f'_+(x)$.

利用这个结论可以判断分段函数在分段点处的可导性.

(2) 函数的可导与连续的关系

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则函数在该点必连续；反之，函数在点 x 处连续却不一定在该点处可导.

2. 函数的求导法则

(1) 四则运算的求导法则

$$(u\pm v)'=u'\pm v';$$

$$(uv)'=u'v+uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0).$$

(2) 复合函数的求导法则

由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的求导法则为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\qquad 或 \qquad y'=(f[\varphi(x)])'=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

(3) 隐函数的求导法则

形如 $F(x,y)=0$ 的函数叫做隐函数，把 y 看作是 $y(x)$，对方程两边关于 x 求导，化

简即得 y'.

（4）二阶导数

把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$，即 $y''=(y')'$.

3. 函数的微分

（1）求函数的微分的方法

① 由 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 求微分时，先求导数 $f'(x)$，再乘以 $\mathrm{d}x$.

② 直接利用微分的运算法则，复合函数的微分形式不变性用基本初等函数的微分公式来求微分.

（2）微分的应用

① 当 $|\Delta x|$ 很小时，$\Delta y \approx \mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$，常用来求函数增量的近似值.

② 当 $|\Delta x|$ 很小时，$f'(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x$，常用来求函数的近似值.

综合复习题二

A

1. 根据导数的定义，求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的导数.

2. 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$ 及 $f'_+(0)$，并判断 $f'(0)$ 是否存在.

（1）$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0, \\ \ln(1+x), & x \geqslant 0; \end{cases}$　　（2）$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

3. 求下列函数的导数.

（1）$y=\arcsin(\sin x)$；　　（2）$y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$；

（3）$y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x \cdot \ln\tan x$；　　（4）$y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$；

（5）$y=\sqrt[x]{x}\ (x>0)$.

4. 求下列函数的二阶导数.

（1）$y=\cos^2 x \cdot \ln x$；　　（2）$y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 所确定，求 $y''(0)$.

6. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases} x = a\cos^3\theta, \\ y = a\sin^3\theta; \end{cases}$　　　　(2) $\begin{cases} x = \ln\sqrt{1+t^2}, \\ y = \arctan t. \end{cases}$

7. 求曲线 $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$ 在点 $t=0$ 处的切线方程及法线方程.

8. 利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

9. 已知单摆的振动周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，其中 $g = 980\ \mathrm{cm/s^2}$，l 为摆长(单位为 cm). 设原摆长为 20 cm，为使周期 T 增大 0.05 s，摆长约需加长多少？

10. 甲船以 6 km/h 的速度向东行驶，乙船以 8 km/h 的速度向南行驶，在中午 12 点整，乙船位于甲船之北 16 km 处. 问下午 1 点整两船相离的速度为多少？

B

1. 设 $y = \dfrac{x-3}{2x^2+3x-2}$，求 $y^{(n)}$.

2. 设函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$，求 $y^{(n)}(0)$.

3. 求与曲线 $4x^2+9y^2-8x+18y=59$ 相切，且与直线 $3x-2y=6$ 垂直的直线方程.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1-2x^2, & x<-1, \\ x^3, & -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 12x-16, & x>2, \end{cases}$ 求它的反函数 $y=g(x)$ 的导函数 $y=g'(x)$ 的表达式.

5. 设函数 $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 y 关于 $\sqrt{1-x^2}$ 的二阶导数.

6. 求微分 $\mathrm{d}\left(3^{\sin^2\frac{1}{x}}\right)$.

7. 设 $T = \cos n\theta$，$\theta = \arccos x$，求 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$.

8. 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l. 若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1, 1)$ 时，l 对时间的变化率为多少？

9. 求曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$ 通过点 $(5, 11)$ 的切线方程.

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 其中 $g(0)=g''(0)=g'''(0)=1$，$g'(0)=-1$，求 $f''(x)$.

综合复习题 2
参考答案

阅读材料二

牛顿和他的“流数术”

牛顿(Newton，1643—1727)是英国著名的物理学家、数学家和天文学家，是 17 世纪最伟大的科学巨匠. 1661 年牛顿以减费生的身份进入剑桥大学三一学院，1664 年成为奖学金获得者，1665 年获得学士学位. 1665—1666 年伦敦大疫，剑桥停课，牛顿于 1665 年 6 月回故乡乌尔斯索普. 1667 年牛顿重返剑桥大学，10 月 1 日被选为三一学院的仲院侣，次年 3 月 16 日被选为正院侣. 当时巴罗对牛顿的才能有充分认识. 1669 年 10 月 27 日巴罗便让年仅 26 岁的牛顿接替他担任卢卡斯讲座的教授. 1672 年起他被接纳为皇家学会会员，1703 年被选为皇家学会主席，他于 1727 年 3 月 30 日深夜去世，享年 84 岁.

牛顿于 1664 年秋开始研究微积分问题，在家乡躲避瘟疫期间取得了突破性进展. 1666 年牛顿将其前两年的研究成果整理成一篇总结性论文——《流数简论》，这也是历史上第一篇系统的微积分文献. 在《流数简论》中，牛顿以运动学为背景提出了微积分的基本问题，发明了“正流数术”(微分)；从确定面积的变化率入手通过反微分计算面积，又建立了“反流数术”(积分)；并将面积计算与求切线问题的互逆关系作为一般规律明确地揭示出来，将其作为微积分普遍算法的基础论述了“微积分基本公式”. “微积分基本公式”也称为牛顿-莱布尼茨公式，牛顿和莱布尼茨各自独立地发现了这一公式. 微积分基本公式是微积分中最重要的公式，它建立了微分和积分之间的联系，指出微分和积分互为逆运算. 这样，牛顿就以正、反流数术(即微分和积分)，将自古以来求解无穷小问题的各种方法和特殊技巧有机地统一起来. 正是在这种意义下，我们说牛顿创立了微积分.

《流数简论》标志着微积分的诞生，但它有许多不成熟的地方. 1667 年，牛顿回到剑桥，并未发表他的《流数简论》. 在以后 20 余年的时间里，牛顿始终坚持努力改进、完善自己的微积分学说，先后完成三篇微积分论文：《运用无穷多项方程的分析学》(简称《分析学》，1669)；《流数法与无穷级数》(简称《流数法》，1671)；《曲线求积术》(1691)，它们反映了牛顿微积分学说的发展过程. 在《分析学》中，牛顿回避了《流数简论》中的运动学背景，将变量的无穷小增量叫做该变量的“瞬”，将其看成是静止的无限小量，有时直接令其为零，带有浓厚的不可分量色彩. 在《流数法》中，牛顿又恢复了运动学观点. 他把变量叫做“流”，变量的变化率叫做“流数”，变量的瞬是随时间的瞬而连续变化的. 在《流数法》中，牛顿更清楚地表述了微积分的基本问题：“已知两个流之间的关系，求它们的流数之间的关系”；以及反过来“已知表示量的流数间的关系的方程，求流之间的关系”. 在《流数法》和《分析学》中，牛顿所使用的方法并无本质的区别，都是以无限小量作为微积分算法的论证基础，所不同的是：《流数法》以动力学连续变化的观点代替了《分析学》的静止的不可分量法.

牛顿最成熟的微积分著述《曲线求积术》，对于微积分的基础在观念上发生了新的变革，它提出了“首末比方法”. 牛顿批评自己过去随意扔掉无限小瞬的做法，他说：“在数学中，最微小的误差也不能忽略……在这里，我认为数学的量并不是由非常小的部分组成的，而是用连续的运动来描述的.”在此基础上牛顿定义了流数的概念，继而认为：“流数之比非常接近于尽可能小的等时间间隔内产生的流量的增量比，确切地说，它们构成增量的最初比”，并借助于几何解释把流数理解为增量消逝时获得的最终比. 可以看出，牛顿的所谓“首末比方法”相当于求函数自变量与因变量变化之比的极限，它成为极限方法的先导.

牛顿对于发表自己的科学著作持非常谨慎的态度. 1687 年，牛顿出版了他的力学巨著《自然哲学的数学原理》，这部著作中包含他的微积分学说，也是牛顿微积分学说最早的公开表述，因此该巨著成为数学史上划时代的著作. 而他的微积分论文直到 18 世纪初才在朋友的再三催促下相继发表.

第三章 CHAPTER 3

导数的应用

函数的导数刻画了函数相对于自变量的变化快慢，几何上就是指曲线的切线倾斜度——斜率，它反映了曲线上点的变化情况. 本章将应用导数来研究函数及曲线的某些性态，并利用这些知识解决一些实际问题.

第一节 函数单调性的判定

函数的单调性是函数的重要特性，下面我们将讨论函数的单调性与导数之间的关系，进而提供一种判别函数单调性的方法. 先观察图 3－1 和图 3－2.

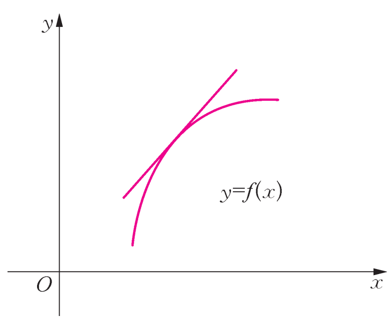


图 3－1

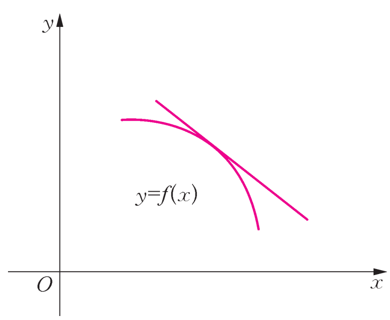


图 3－2

由图 3－1、图 3－2 可以看出：如果函数 $y=f(x)$ 在区间$[a, b]$上单调增加(或单调减少)，它的图像是一条沿 x 轴上升(或下降)的曲线. 这时，曲线上各点处的切线斜率是正的(或负的)，即 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$). 由此可见，函数的单调性和导数符号有着密切的关系.

一般地，函数在一个区间上的单调性，可以用它的导数的正负号来判定.

函数单调性的分析

定理 3.1 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内可导.

(1) 如果在区间 I 内 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在区间 I 内单调增加；

(2) 如果在区间 I 内 $f'(x)<0$，则 $f(x)$在区间 I 内单调减少；

(3) 如果在区间 I 内 $f'(x)=0$，则在区间 I 内 $f(x)$是常数.

证明从略.

例 1 讨论函数 $f(x)=2x-\cos x$ 在定义域内的单调性.

解 函数 $f(x)=2x-\cos x$ 的定义域是$(-\infty, +\infty)$，因为

$$f'(x)=2+\sin x>0,$$

所以函数 $f(x)$在区间$(-\infty, +\infty)$上单调增加.

例 2 讨论函数 $f(x)=3x-x^3$ 的单调性.

解 函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$，并且有

$$f'(x)=3-3x^2=3(1-x^2),$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=1$.

当 $x\in(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 单调减少.

当 $x\in(-1, +1)$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 单调增加.

由本例可知，$x=\pm1$ 是函数 $f(x)$单调区间的分界点.

通常列表讨论函数的单调性，例 2 函数的单调性见表 3－1，表中“↗”表示函数单调增加，“↘”表示函数单调减少.

表 3－1

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	分界点	↗	分界点	↘

综上所述，判断函数单调性或求函数单调区间可按下面的步骤进行：

第一步：确定函数的定义域.

第二步：求出使 $f'(x)=0$ 的点(称这样的点为函数的驻点)，用驻点和不可导点将 $f(x)$的定义域划分成若干个子区间.

第三步：在每个子区间上判定函数的单调性(为了简明起见，建议列表进行分析).

例 3 确定函数 $f(x)=x^3-6x^2-15x+2$ 的单调区间.

解 函数 $f(x)=x^3-6x^2-15x+2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，并且

$$f'(x)=3x^2-12x-15=3(x-5)(x+1).$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=5$.

它们将定义域分成 3 个子区间，列表 3-2 讨论如下.

表 3-2

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,5)$	5	$(5,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	分界点	$\searrow$	分界点	$\nearrow$

可知函数 $f(x)=x^3-6x^2-15x+2$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和区间 $(5,+\infty)$ 内都单调增加，在区间 $(-1,5)$ 内单调减少.

需要说明的是：使导数不存在的点也可能是函数增减区间的分界点. 例如 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处连续，其导数在点 $x=0$ 处不存在，但显然 $x=0$ 是函数增减区间的分界点.

例 4 证明：当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

证明 令 $f(x)=2\sqrt{x}-\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(x\sqrt{x}-1).$$

因为当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加，从而当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)$. 由于 $f(1)=0$，故 $f(x)>f(1)=0$，即

$$2\sqrt{x}-\left(3-\frac{1}{x}\right)>0,$$

即当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x}$.

习题 3.1

A

1. 填空题.

(1) 函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+10$ 的单调增加区间是__________，单调减少区间是__________；

(2) 函数 $f(x)=x^4-27$ 的单调增加区间是__________，单调减少区间是__________.

2. 确定下列函数的单调区间.

(1) $y=x^4-2x^2-5$;　　(2) $y=2x+\dfrac{8}{x}$;

(3) $y=2x^2-\ln x$;　　(4) $y=x-e^x$.

B

运用函数单调性证明下列不等式.

(1) 当 $x>0$ 时, $\ln(1+x)<x$;

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时, $\arctan x\leqslant x$.

习题 3.1
参考答案

第二节 函数的极值

由第一节例 3 我们知道,点 $x_1=-1$ 和 $x_2=5$ 是函数 $f(x)=x^3-6x^2-15x+2$ 的单调区间的分界点,如在点 $x_1=-1$ 左近旁,函数 $f(x)$ 是单调增加的,在点 $x_1=-1$ 右近旁,函数 $f(x)$ 是单调减少的. 因此在点 $x_1=-1$ 的左右附近的任何点 $x(x\neq -1)$, $f(x)<f(-1)$ 均成立. 对于这种特征,有如下定义.

定义 3.1 设函数 $f(x)$在点 x_0 的左右附近有定义,如果对在点 x_0 的左右附近任意 $x(x\neq x_0)$,恒有 $f(x)<f(x_0)$(或 $f(x)>f(x_0)$),则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值),函数的极大值与极小值统称为函数的**极值**,使函数取得极值的点称为相应的**极值点**,且当 $f(x_0)$是一个极大(小)值时,称 x_0 为 $f(x)$的一个极大(小)值点.

函数的极值

注:(1) 函数的极大值和极小值概念是局部性的,也就是说,如果 $f(x_0)$是函数的极大(小)值,那只是说在极值点 x_0 附近一个局部范围来说的,在整个定义域中,它不一定是 $f(x)$的最大(小)值.

(2) 函数的极大值不一定比极小值大.

(3) 函数的极值一定出现在区间的内部,在区间的端点处不能取得极值.

在图 3-3 中,可以看出,对于可导函数极值点处对应曲线的切线是水平的.

课堂练习 3.1

定理 3.2(极值存在的必要条件) 若函数 $f(x)$在点 x_0 处可导,且

$f(x)$在点 x_0 处取得极值,则必有 $f'(x)=0$.

证明从略.

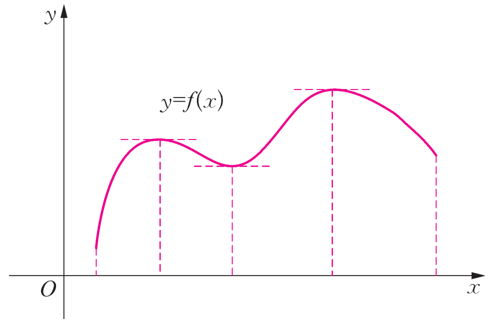


图 3-3

定理 3.2 讲的是这样一个事实,对于可导函数,极值点必然是它的驻点,但驻点不一定是极值点.例如,$x=0$是函数 $y=x^3$ 的驻点,但不是其极值点,当驻点为函数的单调增加区间与单调减少区间的分界点,也就是说驻点两侧导数符号相反时,驻点才是函数的极值点.另外,对于一个连续函数,它的极值也有可能是导数不存在的点.如函数 $f(x)=|x|$, $f'(0)$ 不存在,但 $x=0$ 是它的极小值点.

总之,连续函数的可能极值点只能是驻点和不可导点,为了判断可能极值点是否为极值点,有如下的定理.

定理 3.3(极值判定的第一充分条件) 设函数 $f(x)$在点 x_0 处连续,在 x_0 的左右附近(不包括 x_0)可导.如果在 x_0 左右附近函数 $f(x)$的导数 $f'(x)$变号,则 x_0 是函数的极值点(当在 x_0 的左侧附近 $f'(x)$为正,右侧附近 $f'(x)$为负时,x_0 是极大值点,反之为极小值点);如果在 x_0 的左右附近 $f'(x)$具有相同的符号,则 x_0 不是函数的极值点.

证明从略.

由此可得求连续函数极值的步骤:

(1) 确定函数的定义域.

(2) 求出使 $f'(x)=0$ 和 $f'(x)$不存在的点,即求出定义域内的所有驻点和不可导点.

(3) 用这些点将函数定义域分成若干个子区间,在每个子区间上确定 $f'(x)$的符号.

(4) 根据驻点和不可导点左右邻域 $f'(x)$的符号确定极值点,并求出极值.

例 1 求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x-7$ 的极值.

解 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1).$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=-2$, $x_2=1$.

依次判断驻点两侧 $f'(x)$的符号,列表 3-3 如下.

表 3-3

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大点	↘	极小点	↗

所以函数在点 $x_1=-2$ 处取得极大值 $f(-2)=13$，在 $x_2=1$ 处取得极小值 $f(1)=-14$.

例 2 求函数 $f(x)=2-(x-9)^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解 因为 $f(x)=2-(x-9)^{\frac{2}{3}}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且 $f(x)$ 在$(+\infty,-\infty)$ 连续，由于

$$f'(x)=-\frac{2}{3}(x-9)^{-\frac{1}{3}}=\frac{-2}{3(x-9)^{\frac{1}{3}}}\ (x\neq 9),$$

所以当 $x=9$ 时，$f'(x)$不存在，即 $x=9$ 是函数的可能极值点.

因为当 $x\in(-\infty,9)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(9,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在点 $x=9$ 处取得极大值 $f(9)=2$.

极值判定的第一充分条件既适用于点 x_0 处可导，也适用于点 x_0 处不可导的函数. 若函数在驻点 x_0 的二阶导数存在且不为零，则可利用下面极值判定的第二充分条件判定函数的极值.

定理 3.4(极值判定的第二充分条件) 设函数 $f(x)$在点 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x)=0$，$f''(x)\neq 0$，则 x_0 是函数的极值点(当 $f''(x_0)<0$ 时，x_0 是 $f(x)$ 的极大点；当 $f''(x_0)>0$ 时，x_0 是 $f(x)$的极小点).

证明从略.

例 3 求函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+10$ 的极值.

解 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，令

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)=0,$$

得驻点为 $x_1=1$ 和 $x_2=3$.

由于

$$f''(x)=6x-12,$$

$f''(1)=-6<0$，所以 $f(x)$ 在点 $x_1=1$ 处取得极大值 $f(1)=14$；

$f''(3)=6>0$，所以 $f(x)$ 在点 $x_2=3$ 处取得极小值 $f(3)=10$.

在很多情况下，利用极值判定的第二充分条件来求函数的极值比较简便，但有时候必须使用第一充分条件来求极值，也就是说极值判定的第一充分条件适用范围更广泛.

例 4 求函数 $f(x)=x^2(x^4-3x^2+3)$ 的极值.

解 函数 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，令

$$f'(x)=6x(x^2-1)^2=0,$$

得驻点为：$x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$.

$$f''(x)=6(x^2-1)(5x^2-1).$$

$f''(0)=6>0$，所以 $f(x)$ 在点 $x_2=0$ 处取得极小值 $f(0)=0$；

$f''(\pm 1)=0$，所以对 $x_1=-1$ 和 $x_3=1$ 不能用极值判定的第二充分条件.

用极值判定的第一充分条件易知，$f(x)$在这两点处没有极值.

习题 3.2

A

求下列函数的极值点和极值.

(1) $y=x^2-2x+3$；

(2) $y=x+\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=-x^4+2x^2$；

(4) $y=3-2(x-1)^{\frac{1}{3}}$.

B

求下列函数的极值点和极值.

(1) $y=\sqrt{1+x}-x$；

(2) $y=x+\tan x$；

(3) $y=e^x\cos x$；

(4) $y=2e^x+e^{-x}$.

习题 3.2
参考答案

第三节 函数的最大值与最小值

在生产实践中，常遇到这样一类问题：在一定条件下，怎么使投入最少，产出最大，成本最低，效率最高等，这类问题在数学上反映的就是函数的最大值、最小值问题.

怎样求函数 $f(x)$的最大值、最小值呢？

一、闭区间[a，b]上连续函数的最大(小)值

我们知道，如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，那么 $f(x)$在$[a,b]$上一定取得最大(小)值. 对可导函数来说，最大(小)点不是在区间端点上，就是在开区间(a,b)内的驻点之中，这就是说只要比较区间端点处 $f(a)$，$f(b)$的值，以及驻点处的函数值的大小，就

能求出函数的最大值和最小值. 根据第二节的分析,极值点也可能是导数不存在的点,而导数不存在的点,函数也有可能取得最大(小)值. 因此,求连续函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上最大(小)值的步骤是:

(1) 求出函数在区间(a, b)内的所有驻点及导数不存在的点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

(2) 计算出函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$及端点处的函数值 $f(a), f(b)$.

(3) 比较以上函数值的大小,其中最大者就是 $f(x)$在$[a, b]$上的最大值,最小者就是 $f(x)$在$[a, b]$上的最小值.

例 1 求函数 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+14$ 在区间$[-3, 3]$上的最大值与最小值.

解

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1).$$

令 $f'(x)=0$,得到驻点 $x_1=-2$, $x_2=1$,计算驻点及区间端点上的函数值:

$$f(-2)=34, f(1)=7, f(-3)=23, f(3)=59.$$

比较这些值的大小可知,$f(x)$在区间$[-3, 3]$上的最大值为 $f(3)=59$,最小值为 $f(1)=7$.

例 2 求函数 $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ 在区间$[0, 3]$上的最大值和最小值.

解 函数 $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ 在区间$[0, 3]$上连续,且

$$y'=\frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2-2x}}.$$

由此可见,函数在区间$(0, 3)$内的驻点为 $x=1$,不可导点为 $x=2$.

课堂练习 3.2

由于 $y(0)=y(2)=0$, $y(1)=1$, $y(3)=\sqrt[3]{9}$,所以,函数在区间$[0, 3]$上的最大值为 $y(3)=\sqrt[3]{9}$,最小值为 $y(0)=y(2)=0$.

二、在有限开区间或无穷区间上恰有一个驻点时函数的最大(小)值

定理 设函数 $f(x)$的定义域是开区间(a, b), $f(x)$在定义域内可导,且恰有一个驻点 x_0. 那么,如果 x_0 是极大值点,则 x_0 一定是最大值点. 如果 x_0 是极小值点,则 x_0 一定是最小值点.

证明从略.

例 3 求函数 $f(x)=x^2-\dfrac{54}{x}$ 在区间$(-\infty, 0)$上的最小值.

解 $f'(x)=2x+\dfrac{54}{x^2}$,令 $f'(x)=0$ 得 $x=-3$.

$$f''(x)=2-\frac{108}{x^3},\ f''(-3)=6>0.$$

由极值判定的第二充分条件可知 $x=-3$ 是极小值点，且恰有一个驻点，所以 $x=-3$ 是最小值点，最小值为 $f(-3)=27$.

例 4 求函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在区间(0, 2)上的最大值.

解 $f'(x)=\dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-1$(舍去)，$x_2=1$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时 $f'(x)<0$，所以 $x=1$ 为极大值点，且在区间(0, 2)上，恰有一个驻点，所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值，最大值为 $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

三、应用举例

例 5 有一边长为 24 cm 的正方形铁皮，四角各截去一个大小相等的小正方形，然后将正方形折成一个方形无盖容器(图 3-4). 问截去的小正方形的边长为多少时，所得容器的容积最大？最大容积是多少？

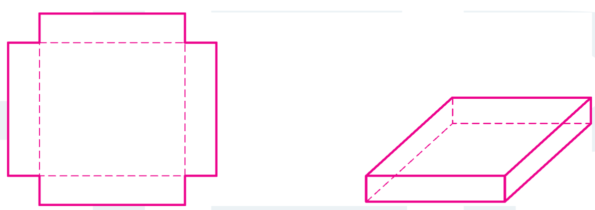


图 3-4

解 设截去的小正方形边长为 x cm，则正方形容器的底边长为 $24-2x$ cm，高为 x cm，于是容积

$$V=x(24-2x)^2,\ 0<x<12.$$
$$V'=(24-2x)(24-6x).$$

令 $V'=0$，得驻点 $x_1=4$ 和 $x_2=12$(舍去).

$x_1=4$ 是满足 $0<x<12$ 的唯一驻点，且根据极值判定的第一充分条件，易知其为极大值点. 所以截去的小正方形的边长为 4 cm 时，容积最大. 最大容积为

$$V(4)=4(24-2\times 4)^2=1\,024(\text{cm}^3).$$

例 6 有一块宽为 40 cm 的长方形铁皮，将它的两个边缘向上折起成开口水槽，使其横截面为一矩形，问水槽高为多少时，水槽的截面积最大？

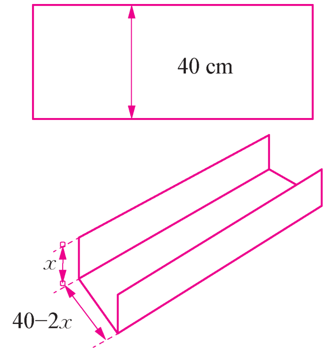


图 3－5

解 如图 3－5 所示，设水槽高为 x cm，截面积为 S cm^2，则

$$S=x(40-2x),$$
$$S'=(40-4x).$$

由 $S'=0$ 得 $x=10$ 是唯一极值点，且是极大值点，因而当水槽高为 10 cm 时，水槽截面积最大.

习题 3.3

A

1. 求下列函数的最大值与最小值.

   (1) $y=x^2-4x+6$，$x\in[-3,10]$；

   (2) $y=2+\sqrt{x}$，$x\in[0,4]$；

   (3) $y=2x^3-6x^2-18x-7$，$x\in[1,4]$.

2. 试证明面积为定值的矩形中，正方形的周长最短.

B

1. 求下列函数的最大值与最小值.

   (1) $y=\sqrt{5-4x}$，$x\in[-1,1]$；

   (2) $y=x^{\frac{2}{3}}(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$，$x\in[0,2]$.

2. 要做一个容积为 V 的圆柱形容器（无盖），问底半径和高分别为多少时能使其用料最省？

习题 3.3
参考答案

*第四节 导数在经济分析和物理学中的应用

导数在许多领域有着广泛的应用，下面就导数在经济分析和物理学中的应用作简要

介绍.

一、导数在经济分析中的应用

1. 边际经济函数

在经济学中,边际成本定义为产量增加一个单位时所增加的总成本.

设产品的产量为 x 单位时所需要的总成本函数为 $C=C(x)$,当总成本函数 $C=C(x)$ 可导时,其导数

$$C(x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$$

表示该产品产量为 x 时的边际成本,即边际成本是总成本函数关于产量的导数.

类似地,边际收入定义为多销售一个单位产品所增加的销售总收入,即 $R'(x)$,这里 $R(x)$ 为销售量为 x 时的总收入.再如,边际利润为 $L'(x)$,这里 $L(x)$ 为产量为 x 时的总利润.

边际成本、边际收入、边际利润通常用 MC、MR、ML 表示.

例 1 某商品产量为 x(千升)时的成本函数为 $C(x)=3\sqrt{x}+4$(千元),其中 $0\leqslant x\leqslant 5$,求当 $x=1$,$x=4$ 时的边际成本,并给以适当的解释.

解 边际成本函数

$$MC=C'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}},$$

当 $x=1$ 时,$MC=1.5$;当 $x=4$ 时,$MC=0.75$.

以上结果表明在生产 1 千升基础上再生产 1 千升需成本 1.5 元;在生产 4 千升基础上再生产 1 千升仅需成本 0.75 元,即产量越高,成本越低.

例 2 某公司生产某种产品的总利润 $L(x)$(万元)与产量 x(吨)的函数关系为 $L(x)=2x-0.005x^2-150$,试求每天生产 150 吨、200 吨、350 吨时的边际利润,并说明其经济含义.

解 边际利润函数

$$ML=L'(x)=2-0.01x,$$

当 $x=150$ 时,$ML=0.5$;当 $x=200$ 时,$ML=0$;当 $x=350$ 时,$ML=-1.5$.

以上结果表明当日产量在 150 吨时,每天增加 1 吨产量可增加利润 0.5 万元;当日产量在 200 吨时,再增加产量总利润不会增加;而当产量在 350 吨时,每天产量再增加 1 吨反而使总利润减少 1.5 万元.由此可见,该公司应该把日产量定在 200 吨,此时的总利润为

$$L(200)=2\times 200-0.005\times 200^2-150=50(\text{万元}).$$

从上例可以看出,公司获利最大的时候,边际利润为零.

2. 需求弹性

弹性即反应性,是函数 $y=f(x)$ 中自变量的相对改变量对函数的相对改变量影响的反应.弹性分析也是经济分析中常用的一种方法,主要用于生产、供给、需求等问题的研究.

定义 3.2 对于函数 $y=f(x)$,如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$ 存在,则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}=\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{y}f'(x),$$

称之为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的弹性,记作 E,即

$$E=\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

由上述定义可以看出,函数 $y=f(x)$ 的弹性是函数的相对改变量与自变量的相对改变量比值的极限,它是函数的相对变化率,或当自变量变化 1%时函数变化的百分数.

由需求函数 $Q=Q(p)$,其中 Q 为需求,p 为价格,可得需求弹性为

$$E_d=\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}.$$

根据经济学理论,需求函数是单调减少函数,所以需求弹性一般取负值.

例 3 设某商品的需求函数为 $Q=3\,000\mathrm{e}^{-0.02p}$,求价格为 100 时的需求弹性并解释其经济意义.

解

$$E_d=\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{-0.02p\times 3\,000\mathrm{e}^{-0.02p}}{3\,000\mathrm{e}^{-0.02p}}=-0.02p,$$

$$E_d(100)=-2.$$

它的经济学意义是:当价格为 100 时,若价格增加 1%时,则需求减少 2%.

二、导数在物理学中的应用

例 4 一质点以 50 m/s 的发射速度垂直射向空中,t s 后达到的高度为 $s=50t-$

$5t^2$(m)，假设在此运动过程中重力为唯一的作用力，试问：

(1) 该质点达到的最大高度是多少？

(2) 该质点离地面 120 m 时的速度是多少？

(3) 该质点何时重新回到地面？

解 由题设知，质点在时刻 t 的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(50t-5t^2)=-10(t-5).$$

(1) 当 $t=5$ s 时，$v=0$，此时质点达到最大高度，$s=50\times5-5\times5^2=125$(m)；

(2) 令 $s=50t-5t^2=120$，解得 $t=4$ 或 $t=6$，故 $v=10$(m/s) 或 $v=-10$(m/s)；

(3) 令 $s=50t-5t^2=0$，解得 $t=10$，即该质点 10 s 后重新回到地面.

例 5 在对电容器充电的过程中，电容器充电的电压为 $u_C=E\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$，求电容器的充电速度 $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=E\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)'=\frac{E}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

习题 3.4

A

1. 某产品的需求函数和总成本函数分别为 $Q(q)=800-0.1q$，$C(q)=5\,000-20q$，求边际利润函数，并计算 $q=150$ 时的边际利润.

2. 某产品的需求量 Q 对价格 p 的函数关系为 $Q=1\,600\left(\dfrac{1}{4}\right)^p$，求当 $p=3$ 时的需求弹性.

3. 设通过某导线的电量与时间的函数关系为 $f(t)=2t^3-t^2+2$，求在时刻 $t=5$ 时的瞬时电流强度.

B

1. 一人以 2 m/s 的速度通过一座高为 20 m 的桥，在此人的正下方有一小船以 $\dfrac{3}{4}$ m/s 的速度向与桥垂直的方向前进，求第 5 s 末人与小船分离的速度.

2. 设生产某种产品 x 个单位时的收入 $R(x)=200x-0.01x^2$，求生产 50 个单位时的收入及边际收入.

习题 3.4
参考答案

本 章 小 结

一、学习目标与要求

1. 掌握函数单调性和极值的判别方法，会求函数的单调区间和极值.
2. 了解利用函数单调性证明不等式的方法.
3. 掌握函数最值的判断方法，会求一些简单实际问题中的最大值和最小值.
4. 了解导数在经济分析和物理学中的简单应用(选学内容).

二、本章主要内容

1. 求函数 $f(x)$的单调区间. 根据 $f'(x)>0$ 和 $f'(x)<0$ 分别求出函数 $f(x)$的单调增加区间和单调减少区间.

2. 求函数 $f(x)$的极值. 先求出它的可能极值点(驻点和不可导点)，再根据可能极值点两侧 $f'(x)$的正负号确定是否为函数的极值点.

3. 求最大(小)值问题. 这是在生产实践中常要涉及的问题. 先要将实际问题转化为数学问题，即建立数学模型，也就是先建立函数关系，再求函数的最大(小)值.

连续函数在区间$[a,b]$上的最大(小)值，只能在驻点、导数不存在的点和区间的端点处取得，因此只需要比较这些点处函数值的大小，就可得到函数的最大(小)值.

4. 经济函数的边际. 边际概念是研究经济学核心命题的基本概念，通常指经济变量的变化率. 利用导数研究经济变量的边际变化的方法，叫做边际分析法，是经济理论中的一个重要方法. 本章分别介绍了边际成本、边际利润、需求弹性等.

综合复习题三

A

1. 求下列函数的极值.

(1) $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-5)^2$；

(2) $y=x^2+x^4$.

2. 求下列函数在给定区间上的最大值和最小值.

(1) $y=1-2\sqrt[3]{(x+1)^2}$，$x\in[-2,2]$；

(2) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+1$，$x\in[-3,3]$.

3. 已知矩形的周长为 24，将它绕一边旋转成一立体，问矩形的长、宽各为多少时，所得立体的体积最大？

B

1. 求下列函数的极值.

(1) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$；　　(2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

2. 设函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在点 $x_1=1$ 和 $x_2=2$ 处有极值. 试确定 a, b 的值,并问 $f(x)$ 在点 $x_1=1$ 和 $x_2=2$ 处取得极大值还是极小值?

3. 某产品的需求函数和总成本函数分别为 $Q(q)=800-10q$, $C(q)=5\,000+20q$,求边际利润函数,并计算 $q=150$ 和 $q=400$ 时的边际利润.

4. 设某企业的利润函数为 $L(q)=10+2p-0.1q^2$,求利润最大时的产量 q.

综合复习题三
参考答案

阅读材料三

拉格朗日简介

拉格朗日(Lagrange, 1736—1813)是法国数学家、力学家、天文学家. 他 1736 年 1 月 25 日生于意大利西北部的都灵,于 1813 年 4 月 10 日卒于巴黎.

拉格朗日的祖父是法国人、祖母是意大利人. 他的父亲是一位富商,曾想把拉格朗日培养成自己商业上的接班人,因此希望他学法律. 但拉格朗日在中学时代读了天文学家哈雷写的一篇谈论计算方法的小品文——《在解决求光学玻璃的焦点问题时,近世代数优越性的一个实例》之后,就对数学和天文学产生了兴趣,不久他进入都灵皇家炮兵学院学习. 拉格朗日通过自学的方式钻研数学,尚未毕业就担任了该院的部分数学教学工作;18 岁时开始撰写论文;19 岁被正式聘任为该院的数学教授.

1755 年,拉格朗日开始和欧拉通信讨论“等周问题”,从而奠定了变分法的基础.

1757 年,拉格朗日和几位年轻科学家创办了都灵科学协会和学术杂志《都灵文集》. 在《都灵文集》上他发表了大量论文,1764 年和 1766 年因在天文学研究中取得的成果,先后两次获得法国科学院奖,从而在世界范围赢得了很高的声誉.

1766 年,在柏林科学院物理数学所任所长的欧拉要重回彼得堡,临行前普鲁士国王腓特烈大帝要欧拉推荐一位称职的继任者. 欧拉认为非拉格朗日莫属,同时达朗贝尔也作了同样的推荐. 于是腓特烈大帝亲自写信给拉格朗日说:“欧洲最伟大的君王希望欧洲最伟大的数学家到他的宫廷里来.”于是拉格朗日到了柏林,就任柏林科学院物理数学所所长职务,这时他年仅 30 岁.

拉格朗日 1759 年被选为柏林科学院院士,1772 年被选为法国科学院院士,1776 年被选为彼得堡科学院名誉院士,1766—1786 年担任柏林科学院的主席.

拉格朗日对代数、数论、微分方程、变分法、力学和天文学都进行了广泛而深入的研究，并取得了丰硕的成果，其作品浩如烟海.

对于微积分学，拉格朗日试图抛弃自牛顿以来模糊不清的无穷小概念. 拉格朗日的学生们发现无限小和无限大的概念很难掌握，而传统形式的微积分学充满了这些概念. 为了克服这些困难，拉格朗日试图不用莱布尼茨的“无穷小”和牛顿的极限的特殊概念来建立微积分学，为此他写成《解析函数论》. 此书的副标题是：“不用无穷小、正在消失的量或极限与流数等概念，而归结为有限的代数分析的艺术”. 他试图把微分、无穷小和极限等概念从微积分中完全排除. 他先用代数方法证明了泰勒展开式，接着定义导数（微商）是泰勒展开式中的系数，然后建立起全部分析学. 他认为这样就可以克服极限理论的困难，可是无穷级数的收敛问题，仍然无法逃避极限. 尽管他的“纯代数的微分学”没有成功. 但他另辟蹊径的探讨得到了高度的赞赏，并推动了柯西等人去创立一种令人满意的微积分学，从而对后来微积分基础理论的逻辑发展产生了深远的影响. 特别是《解析函数论》对函数的抽象处理，可说是实变函数论的起点. 他还给出了泰勒级数的余项公式，研究了二元函数极值，阐明了条件极值的理论，并研究了三重积分的变量代换等问题.

在微分方程方面，他也获得了很多重要结果：例如，对奇解与通解的联系作了系统的研究，用明确而漂亮的手法从通解中消去常数而得到特解，从而给出了一般性的方法；他还发现，线性齐次方程的通解是一组独立的特解的线性组合，而且在知道了高阶线性齐次方程的特解后，可以把方程降低阶；在解线性非齐次微分方程时，他提出了常数变易法.

拉格朗日对代数和数论曾作出过杰出贡献. 他是最早意识到一般五次和一般更高次的代数方程不存在根式求解法的数学家之一. 他的《关于方程的代数解的研究》开辟了代数发展的新时期.

拉格朗日最得意的著作是《分析力学》，撰写这部巨著，他倾注了大量的智慧和精力，整整经历了 37 个春秋. 在这部著作中，他利用变分原理建立了优美、和谐的力学体系，把宇宙描绘成为由数字和方程组成的有节奏的旋律. 这部著作里的精辟论述，使动力学这门科学达到了登峰造极的地步，它还把固体力学和流体力学这两个分支统一了起来，从而奠定了现代力学的基础. 哈密顿（Hamilton）把这部著作誉之为一部“科学诗篇”.

近百年来，数学领域的许多成就都可以直接或间接地溯源于拉格朗日的工作. 所以他在数学史上被认为是对分析数学的发展产生全面影响的数学家之一，被誉为“欧洲最伟大的数学家”.

第四章 CHAPTER 4
不定积分

通过学习导数与微分，知道了求导是一种运算，它的被运算对象是函数. 在以前也学过很多的运算，例如，加、减、乘、除、乘方、开方、指数、对数等，如果将求导运算与这些很熟悉的运算相类比，观察这些运算关系，不难发现它们都成对出现，而且每对都是互为逆运算. 那么，求导运算是否有逆运算？它的逆运算是什么？

第一节 原函数与不定积分

一、原函数

引例 1 某物体由静止开始作自由落体运动，已知在时刻 t 的瞬时速度为 $v(t)=gt$，求在最初的 3 s 中下落的距离.

分析 设此作自由落体运动的物体的运动路程函数为 $s=s(t)$，由于在时刻 t 的瞬时速度为 $v(t)=gt$，即

$$s'(t)=v(t)=gt.$$

要求最初的 3 s 中下落的距离，需先求运动路程函数 $s=s(t)$.

引例 2 已知某曲线经过点(0, 1)，且其上任意一点处的切线斜率等于该点处横坐标的两倍，求该曲线的方程.

分析 设所求的曲线方程为 $y=F(x)$，由导数的几何意义知曲线上

任意一点$(x,\ y)$处的切线的斜率为：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，即有$F'(x)=2x$.

以上两个引例都可以归纳为已知一个函数$F(x)$的导数$f(x)$，即$F'(x)=f(x)$，求原来的函数$F(x)$的问题. 显然这就是导数运算的逆运算.

定义 4.1 设函数$f(x)$是定义在区间$(a,\ b)$内的已知函数，如果存在函数$F(x)$，使对于任意的$x\in(a,\ b)$，都有

$$F'(x)=f(x)\qquad \text{或} \qquad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称$F(x)$是函数$f(x)$(在区间$(a,\ b)$内)的一个原函数.

显然，引例 1 求自由落体运动的距离就要先求符合条件$s'(t)=v(t)$的一个原函数$s=s(t)$.

因为
$$\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=gt，所以\frac{1}{2}gt^2 \text{ 是 } gt \text{ 的原函数},$$

$$\left(\frac{1}{2}gt^2+1\right)'=gt，所以\frac{1}{2}gt^2+1 \text{ 是 } gt \text{ 的原函数},$$

$$\left(\frac{1}{2}gt^2+C\right)'=gt，所以\frac{1}{2}gt^2+C \text{ 是 } gt \text{ 的原函数}\ (C \text{ 是任意常数}),$$

即
$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+C\ (C \text{ 是任意常数}).$$

将已知条件$s(0)=0$代入上式，得$C=0$，所以$s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$，于是$s(3)=\dfrac{1}{2}g\times 3^2\approx 44.1(\mathrm{m})$.

引例 2 所求曲线方程为$y=F(x)$，就要先求$2x$的一个原函数.

因为$(x^2+C)'=2x$，所以x^2+C是$2x$的原函数(C是任意常数)，则

$$F(x)=x^2+C\ (C \text{ 是任意常数}).$$

将点$(0,\ 1)$代入得$F(x)=x^2+1$.

由以上两例可以看出，如果函数有一个原函数，则原函数有无穷多个，并且每个原函数之间只相差一个常数C，实际上若$F(x)$是$f(x)$的原函数，即$F'(x)=f(x)$，则$[F(x)+C]'=f(x)$，即$F(x)+C$也是$f(x)$的原函数.

二、不定积分

定义 4.2 函数$f(x)$的全体原函数叫做$f(x)$的不定积分，记作：

$$\int f(x)\mathrm{d}x,$$

其中“$\int$”称为积分号，$f(x)$称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

由定义 4.2 知，如果 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，那么 $F(x)+C$ 就是 $f(x)$的不定积分，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C \quad (C\text{ 为积分常数}).$$

注：(1)“$\int$”为积分号，是积分运算的标识符号.

(2) 整个 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 是一种数学语言，称为 $f(x)$的不定积分，并不意味着 $\int$ 乘以 $f(x)\mathrm{d}x$.

(3) 不定积分是求导的逆运算.

(4) $\int f(x)\mathrm{d}x$ 是 $f(x)$ 的全体原函数，是函数的集合，因此不定积分的结果中不能漏写任意常数 C.

(5) 求一个函数的不定积分只要求出它的一个原函数，再加上一任意常数就行了.

例 1 求 $\int x^2\mathrm{d}x$.

解 因为 $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)'=x^2$，所以 $\dfrac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数. 因此

$$\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+C.$$

例 2 求 $\int\cos x\,\mathrm{d}x$.

解 因为 $(\sin x)'=\cos x$，所以 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数. 因此

$$\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C.$$

例 3 求 $\int\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 当 $x>0$ 时，因为 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，所以 $\ln x$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的原函数，因此在 $(0,+\infty)$ 内，有

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C.$$

当 $x<0$ 时，因为

$$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x},$$

所以 $\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的原函数，因此在 $(-\infty, 0)$ 内有

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(-x)+C.$$

课堂练习 4.1

把以上结果综合起来，得

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C.$$

三、不定积分的几何意义

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，从几何图形上看，$y=F(x)$ 表示一条确定的曲线，称之为 $f(x)$ 的一条积分曲线. 由于 C 的任意性，所以 $y=F(x)+C$ 表示的是一簇积分曲线，这簇积分曲线可以由其中任意一条曲线沿着 y 轴向上或向下平移而得到. 因此，在横坐标相同处所有积分曲线的切线彼此平行，这些切线有相同的斜率 $F'(x_0)$，如图 4－1 所示.

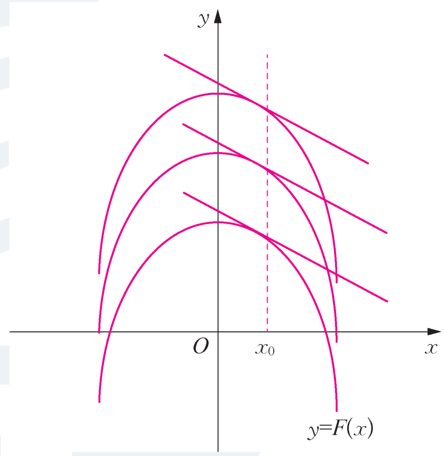


图 4－1

习题 4.1

A

1. 利用定义计算下列不定积分.

(1) $\int\sin x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int 2^x\,\mathrm{d}x$；　　(3) $\int x^5\,\mathrm{d}x$.

2. 解下列问题.

(1) 若曲线经过点 $(2, 1)$，且曲线上任意一点处切线的斜率等于该点横坐标的三倍，求曲线的方程.

(2) 一物体由静止开始运动，经过 t 秒后的速度为 t^2（单位：m/s），求物体的运动方程.

B

1. 利用定义计算下列不定积分.

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. 一物体由静止开始运动，经过 t 秒后的速度为 $3t^2$（单位：m/s），求：

(1) 物体的运动方程；

(2) 5 s 末物体离开出发点的距离.

习题 4.1
参考答案

第二节 直接积分法

在第一节中学习了不定积分的概念，那么如何求不定积分呢？先从不定积分的运算法则开始学习.

一、不定积分的运算法则

根据不定积分的定义和求导的运算法则，可以得到如下不定积分的运算法则.

法则 4.1 由不定积分运算与求导数或微分互为逆运算的关系有：

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x,$$

即不定积分的导数（或微分）等于被积函数（或被积表达式）.

$$\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C \quad 或 \quad \int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C,$$

即函数 $F(x)$ 的导数（或微分）的不定积分等于函数族 $F(x)+C$.

法则 4.2 被积函数中不为零的常数因子可以移到积分号的前面：

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,\ k 是常数且 k\neq 0.$$

法则 4.3 两个函数的和（或差）的不定积分等于各函数不定积分的和（或差），即

$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x.$$

法则 4.3 可推广到 n 个(有限)函数,即 n 个函数的代数和的不定积分等于 n 个函数不定积分的代数和:

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x+\int f_2(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int f_n(x)\mathrm{d}x.$$

不定积分的运算法则的证明思路很简单,只要等式右端求导为左端的被积函数即可.

以法则 4.3 为例:

证明

$$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x\right)'=\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'\pm\left(\int g(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)\pm g(x).$$

故
$$\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x.$$

例 1 求下列不定积分.

(1) $\int(2\cos x-x^2)\mathrm{d}x$; (2) $\int\left(\frac{3}{x}+2x-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int(2\cos x-x^2)\mathrm{d}x=\int 2\cos x\,\mathrm{d}x-\int x^2\mathrm{d}x=2\sin x-\frac{1}{3}x^3+C$.

(2)
$$\begin{aligned}\int\left(\frac{3}{x}+2x-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x&=3\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int 2x\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=3\ln|x|+x^2-\arctan x+C.\end{aligned}$$

由以上例题可以看出,不定积分的运算法则可以把比较复杂的不定积分转化为简单的诸如基本初等函数的不定积分,因此一些基本初等函数不定积分公式就成为求不定积分的基础.

二、不定积分的基本积分公式

因为不定积分与求导互为逆运算,所以我们可以根据求导公式得到对应的积分公式,例如因为 $\left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right)'=\frac{1}{a+1}\times(a+1)x^a=x^a$,所以 $\int x^a\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$,类似地可以得到其他公式,下面给出了基本积分公式和基本求导公式(见表 4-1).

表 4-1

基本积分公式	基本求导公式
(1) $\int k\mathrm{d}x=kx+C$(k 为常数);	(1) $(kx)'=k$;
(2) $\int x^a\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C\ (a\neq-1)$;	(2) $(x^a)'=ax^{a-1}$;

续　表

基本积分公式	基本求导公式
(3) $\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$;	(3) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
(4) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$;	(4) $(a^x)' = a^x \ln a$;
(5) $\int e^x dx = e^x + C$;	(5) $(e^x)' = e^x$;
(6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;	(6) $(\cos x)' = -\sin x$;
(7) $\int \cos x dx = \sin x + C$;	(7) $(\sin x)' = \cos x$;
(8) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$;	(8) $(\tan x)' = \sec^2 x$;
(9) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$;	(9) $(\cot x)' = -\csc^2 x$;
(10) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$;	(10) $(\sec x)' = \tan x \sec x$;
(11) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$;	(11) $(\csc x)' = -\cot x \csc x$;
(12) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$;	(12) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
(13) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$;	(13) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
补充：	因为：
$\int 0dx = C$，$\int 1dx = \int dx = x + C$	$(C)' = 0$，$(x)' = 1$

注：(1) 基本积分公式和基本初等函数的求导公式是相互联系的，可以看到：被积函数恰好是对应求导公式右端的导函数，因而应将以上公式和相应的求导公式联系起来，便于对比学习.

(2) 对基本积分公式要熟记，这是求积分的最基本工具.

三、直接积分法

直接利用基本积分公式和简单运算法则，或对被积函数作适当的变形后再利用基本

积分公式和运算法则求不定积分的方法，称为直接积分法.

例 2 求 $\int(4x^3-2x^2+5x+3)\mathrm{d}x$.

解

$$
\begin{aligned}
&\int(4x^3-2x^2+5x+3)\mathrm{d}x \\
=&\int 4x^3\mathrm{d}x-\int 2x^2\mathrm{d}x+\int 5x\,\mathrm{d}x+\int 3\mathrm{d}x \\
=&4\int x^3\mathrm{d}x-2\int x^2\mathrm{d}x+5\int x\,\mathrm{d}x+3\int \mathrm{d}x \\
=&4\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^3}{3}+5\cdot\frac{x^2}{2}+3x+C \\
=&x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+3x+C.
\end{aligned}
$$

值得注意的是，等式右端的每个不定积分都有一个任意常数，有限个任意常数的代数和还是一个任意常数，所以上式只写一个任意常数.

有些函数看上去不能利用基本积分公式和运算性质进行直接积分，但经过化简或恒等变形，也可以直接进行积分.

例 3 求下列不定积分.

(1) $\int 2^x\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x$；

(3) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int 2^x\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int(2\mathrm{e})^x\,\mathrm{d}x=\frac{(2\mathrm{e})^x}{\ln(2\mathrm{e})}+C=\frac{(2\mathrm{e})^x}{\ln 2+1}+C.$

(2) $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C.$

(3) 因为

$$\tan^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\sec^2 x-1,$$

所以

$$\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x=\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\tan x-x+C.$$

在以上函数的变形中，三角函数的恒等变换是比较灵活的，所以一定要先掌握好一些常用的三角恒等变换公式，如倍角公式、降幂公式等.

课堂练习 4.2

例 4 求 $\int\frac{x+\sqrt{x}+3x^2}{x}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{x+\sqrt{x}+3x^2}{x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{3x^2}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int \mathrm{d}x+\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int 3x\,\mathrm{d}x=x+2x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}x^2+C.$$

例 5 求 $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int \mathrm{d}x-\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=x-\arctan x+C.$$

习题 4.2

A

求下列不定积分.

(1) $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int (x^3+x+1)\mathrm{d}x$;

(4) $\int (2x-1)^2\mathrm{d}x$;

(5) $\int\left(3^x+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$;

(6) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\,\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int a^x \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

B

求下列不定积分.

(1) $\int\left(\frac{2}{1+x^2}+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{(1+2x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

习题 4.2
参考答案

第三节 换元积分法

用直接积分法虽然求出了一些函数的不定积分,但是能利用直接积分法计算的不定积分是十分有限的,最多只能解决一些被积函数由基本积分表中的函数通过代数运算而得到的初等函数的积分,那么,对于被积函数是复合函数或含复合函数的初等函数,应如何积分呢?

一、第一换元积分法(凑微分法)

由于不定积分是求导的逆运算,我们先从求导开始研究.

引例 1 求 $f(x)=e^{x^2}$ 的导数.

分析 根据复合函数的求导法则有

$$(e^{x^2})'=e^{x^2}(x^2)'=e^{x^2}\cdot 2x.$$

我们把它改写成积分式子如下:

$$\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx=\int e^{x^2}(x^2)'dx=\int e^{x^2}dx^2=e^{x^2}+C.$$

观察引例 1:被积函数含有复合函数,在积分时先把被积函数分成两部分,一部分是中间变量 $\varphi(x)$ 的函数 $f[\varphi(x)]$(引例中 $\varphi(x)=x^2$),另一部分是中间变量 $\varphi(x)$ 的导数 $\varphi'(x)$;然后将 $\varphi'(x)dx$ 凑成 $d\varphi(x)$;最后,把 $\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$ 跟基本公式 $\int f(x)dx=F(x)+C$ 对照,直接积分.这种方法称为凑微分法.

定理 4.1 设函数 $u=\varphi(x)$ 可微,且 $\int f(u)du=F(u)+C$,则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=F[\varphi(x)]+C.$$

由复合函数的求导法则可以验证定理 4.1 的正确性(证明从略),利用该定理 4.1 计算不定积分的方法称为**凑微分法**.

例 1 求 $\int \cos 3x\,dx$.

解

$\int \cos 3x\,\mathrm{d}x$　　　对照公式："$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$"

$= \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,\mathrm{d}(3x)$　　　"凑微分"

$= \frac{1}{3}\sin 3x + C.$　　　"求积分"

例 2　求 $\int (2x-1)^{10}\,\mathrm{d}x$.

分析　对照公式："$\int x^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{11}x^{11} + C$".

解　$\int (2x-1)^{10}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{10}\cdot 2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{10}\,\mathrm{d}(2x-1)$

$$= \frac{(2x-1)^{11}}{22} + C.$$

由以上例题可见，凑微分法的关键是凑出中间变量 $\varphi(x)$ 的微分 $\mathrm{d}\varphi(x)$，技巧性很强，对于初学者而言凑微分比较难，但是如果能从解题过程中归纳出一些规律，就可以化难为易. 这里按照常见的被积函数中导数关系的特点，给出一些常见的凑微分形式：

(1) $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b)$.

(2) $\int f(\sqrt{x})\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int f(\sqrt{x})\,\mathrm{d}(\sqrt{x})$.

(3) $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(4) $\int f(\arctan x)\,\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int f(\arctan x)\,\mathrm{d}(\arctan x)$.

(5) $\int f(\ln x)\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\,\mathrm{d}(\ln x)$.

(6) $\int f(\tan x)\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\,\mathrm{d}(\tan x)$.

(7) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$.

(8) $\int f(\arcsin x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int f(\arcsin x)\,\mathrm{d}(\arcsin x)$.

熟记以上的结论并在解题时体会尝试，可以进一步理解凑微分法的思想，提高解题速度.

例 3　求下列不定积分.

(1) $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$.

解 (1) $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int \ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int \ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\frac{(\ln x)^2}{2}+C$.

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}=\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$.

一般地

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$$

在凑微分后若令 $u=\varphi(x)$，则$\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=\int f(u)\mathrm{d}u$，利用不定积分的基本公式积分得$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，再回代 $u=\varphi(x)$ 可求得积分：

$$\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C.$$

因此凑微分法也称第一换元积分法.

例 4 求 $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

解 设 $\frac{1}{x}=u$，$\mathrm{d}x=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$，有

$$\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int u^2\mathrm{e}^u\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u=-\int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u=-\mathrm{e}^u+C=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+C.$$

第一换元积分法的关键是找到 $u=\varphi(x)$，显然 $\varphi(x)$为复合函数的里层函数. 在对换元法熟悉后，常略去中间的换元步骤，直接凑微分后积分即可.

课堂练习 4.3

二、第二换元积分法

在第一换元积分法中，作变换 $u=\varphi(x)$，把积分$\int f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 变成$\int f(u)\mathrm{d}u$ 后再直接积分. 而有一类函数需要作以上相反的变换，令 $x=\varphi(t)$，把$\int f(x)\mathrm{d}x$ 化成

$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 的形式以后再进行积分运算.

引例 2 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

分析 该积分的被积函数中含有根号,无现成的公式可用,可以引入新变量,消去根号后再积分.

解 令 $t=\sqrt{x}$,则 $x=t^2$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$, 代入得

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=2\int\mathrm{d}t-2\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}(t+1)$$

$$=2t-2\ln(1+t)+C\xlongequal{\text{回代}t=\sqrt{x}}2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

一般地,可归纳得到下面的定理.

定理 4.2 设 $x=\varphi(t)$ 单调可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$,又设 $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$,则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令}x=\varphi(t)}\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C\xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)}F[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

其中 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数.通常把用这种求积分的方法称为第二换元积分法.

例 5 求下列不定积分.

(1) $\int\frac{\sqrt{x-4}}{x}\mathrm{d}x$; (2) $\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $\sqrt{x-4}=t$,则 $x=t^2+4$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$, 于是

$$\int\frac{\sqrt{x-4}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{t}{t^2+4}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2}{t^2+4}\mathrm{d}t=2\int\frac{t^2+4-4}{t^2+4}\mathrm{d}t$$

$$=2\int\left(1-\frac{4}{t^2+2^2}\right)\mathrm{d}t=2\left(t-2\arctan\frac{t}{2}\right)+C$$

$$=2\left(\sqrt{x-4}-2\arctan\frac{\sqrt{x-4}}{2}\right)+C.$$

(2) 设 $x=2\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$, $t=\arcsin\frac{x}{2}$,

$$\int\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{2^2-(2\sin t)^2}\,2\cos t\mathrm{d}t$$

$$=4\int|\cos t|\cos t\mathrm{d}t=4\int\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2\int(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=2\left(\int\mathrm{d}t+\int\cos 2t\mathrm{d}t\right)$$

$$=2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$=2t+\sin 2t+C$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

通常情况下第二换元积分法可以解决如下两类问题.

（1）根式代换

当被积函数中含有 $\sqrt[n]{ax+b}$ 的形式，我们可以直接令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$ 或 $x=\frac{1}{a}(t^n-b)$.

（2）三角代换

当被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 或 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，我们采用三角代换.

一般常用的三角代换有下列三种：

① 被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$ 或 $x=a\cos t$；

② 被积函数中含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$ 或 $x=a\cot t$；

③ 被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$ 或 $x=a\csc t$.

习题 4.3

A

求下列不定积分.

(1) $\int\sin 2x\,dx$；

(2) $\int e^{2x+3}\,dx$；

(3) $\int(2x-1)^5\,dx$；

(4) $\int\sin^3x\cos x\,dx$；

(5) $\int\frac{1}{x\ln^2x}dx$；

(6) $\int\frac{x}{\sqrt{x-3}}dx$；

(7) $\int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

B

求下列不定积分.

(1) $\int\frac{1}{2-3x}dx$；

(2) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx$；

(3) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$；　　(4) $\int \dfrac{x^2}{3+x^2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$；　　(6) $\int \dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+4}}$.

习题 4.3
参考答案

第四节 分部积分法

在第三节中我们在复合函数求导法则的基础上，得到了换元积分法，但对某些类型的积分还不能方便地求得，如 $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$，$\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$，$\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$ 等. 分部积分法常用于被积函数是两种不同类型函数乘积的积分，为此，本节将在乘积的求导法则的基础上引出分部积分法.

一、分部积分公式与分部积分法

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均具有连续的导数，由 $(uv)'=u'v+uv'$，得 $uv'=(uv)'-u'v$，两边积分，有

$$\int uv'\mathrm{d}x=\int (uv)'\mathrm{d}x-\int u'v\,\mathrm{d}x,$$

即

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u,$$

称上式为分部积分公式，使用分部积分公式求不定积分的方法称为分部积分法. 分部积分法的核心是将不易求出的积分 $\int u\,\mathrm{d}v$ 转化为较易求出的积分 $\int v\,\mathrm{d}u$，而关键是把积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 写成 $\int u\,\mathrm{d}v$ 的形式，即恰当地选取 $u=u(x)$，$v=v(x)$，使积分 $\int v\,\mathrm{d}u$ 比积分 $\int u\,\mathrm{d}v$ 容易求出.

例 1 求 $\int x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 设 $u=x$，$\mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，$v=-\cos x$，由分部积分公式有

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x=\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u=-x\cos x-\int(-\cos x)\mathrm{d}x$$
$$=-x\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C.$$

如果没有分部积分公式，$x\sin x$ 是无论如何也积不出来的. 一般来说：

$$x^n\ln x,\ x^n\sin bx,\ x^n\cos bx,\ x^n\mathrm{e}^x,\ x^n\arcsin ax,\ x^n\arctan bx$$

等由两个函数乘积构成的不定积分要应用分部积分公式积分.

但是还有一个问题，在例 1 中若选取 $u=\sin x$，$\mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x$，则结果会怎么样呢？

选取 $u=\sin x$，$\mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x$，则

$$\mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x,\ v=\frac{x^2}{2},$$

由分部积分公式有

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\sin x-\int\frac{x^2}{2}\cos x\,\mathrm{d}x$$

这样新得到的积分 $\int\frac{1}{2}x^2\sin x\,\mathrm{d}x$ 反而比原积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ 更难求了.

由此可见在分部积分法中，$u=u(x)$ 和 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}v(x)$ 的选择不是任意的，如果选取不当，就得不出结果. 在通常情况下，按以下两个原则选择 $u=u(x)$ 和 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}v(x)$：

(1) $v(x)$要容易求，这是使用分部积分公式的前提.

(2) $\int v\,\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\,\mathrm{d}v$ 容易求出，这是使用分部积分公式的目的.

二、分部积分法的应用

分部积分法的关键是 u，v 的选择，怎样选取 u，v 才能使得不定积分运算过程简单呢？

1. $\int x^n\sin ax\,\mathrm{d}x$，$\int x^n\cos ax\,\mathrm{d}x$，$\int x^n\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$ (n 为正整数) 类型的积分

一般设 $u=x^n$，而被积表达式的其余部分设为 $\mathrm{d}v$，如本节的例 1 和例 2.

例 2 求 $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解 设 $u=x$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$，则 $v=\mathrm{e}^x$，于是

$$\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int x\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\,\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C.$$

2. $\int x^m\ln x\,\mathrm{d}x$，$\int x^m\arcsin x\,\mathrm{d}x$，$\int x^m\arctan x\,\mathrm{d}x$ ($m\neq-1$，m 为整数) 类型的积分

一般设 $\mathrm{d}v=x^m$，被积表达式的其余部分设为 $u=x^n$，如本节的例 3、例 4.

例 3 求 $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

解 设 $u=\ln x$，$\mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x$，则 $v=\frac{1}{3}x^3$，于是

$$\begin{aligned}\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int\ln x\,\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\mathrm{d}(\ln x)\\&=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C.\end{aligned}$$

例 4 求 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int x\arctan x\,\mathrm{d}x&=\int\arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}(\arctan x)\\&=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.\end{aligned}$$

课堂思考 4.1

3. 如果被积函数为指数函数与正(余)弦函数的乘积，可任选其一为 u，连续使用分部积分法求得

例 5 求 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x&=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}(-\cos x)=-\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x\\&=-\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}(\sin x)=-\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由于上式第三项就是所求的积分 $\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$ 的负值，把它移到等式左边，得

$$2\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+2C,$$

故
$$\int\mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)+C.$$

4. 有时求一个不定积分，需要将换元积分法和分部积分法结合起来使用

例 6 求 $\int\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 先去根号，设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2t\,dt$，于是

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int e^t\cdot 2t\,dt=2\int t\,de^t=2te^t-2\int e^t dt$$
$$=2te^t-2e^t+C=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C.$$

习题 4.4

A

求下列不定积分.

(1) $\int xe^{-x}dx$；　　(2) $\int x\cos x\,dx$；

(3) $\int x\cdot\ln x\,dx$；　　(4) $\int e^x\cos x\,dx$；

(5) $\int \cos\sqrt{x}\,dx$.

B

求下列不定积分.

(1) $\int (x+1)\cos x\,dx$；　　(2) $\int x^2\cdot\sin x\,dx$；

(3) $\int \ln x\,dx$；　　(4) $\int x\cos 2x\,dx$；

(5) $\int x\cdot\arcsin x\,dx$；　　(6) $\int e^{\sqrt{2x-1}}dx$；

(7) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$.

习题 4.4
参考答案

第五节 简易积分表的使用方法

积分的计算比导数的计算灵活、复杂.因而对于高等职业院校培养的应用型人才，当在实际工作中遇到相关的求积分问题时，只要会查积分表或利用数学软件（拓展模块Ⅰ数学实验将介绍）就行了.所谓积分表即把常用的积分公式汇集成的表，本书末附录Ⅲ即为

积分表，以备读者查阅.

积分表是按照被积函数的类型来排列的.查表时，如果所求的积分与表中某个公式形式完全相同，则可立即写出结果；如果所求的积分与表中公式不完全相同，这时就要设法通过某种运算，把它化为表中某个公式的形式，从而得出结果.

先举几个可以直接从积分表中查得结果的例子.

例 1 求 $\int \frac{x}{(3x+5)^2}\mathrm{d}x$.

解 被积函数含有 $a+bx$，在附录Ⅲ积分表（一）中查得公式 7，即有

$$\int \frac{x}{(a+bx)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bx|+\frac{a}{a+bx}\right)+C.$$

现在 $a=5$，$b=3$，于是

$$\int \frac{x}{(5+3x)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\left(\ln|5+3x|+\frac{5}{5+3x}\right)+C.$$

例 2 求 $\int \frac{x}{\sqrt{8+4x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 被积函数含有 $\sqrt{a+bx-cx^2}$，在附录Ⅲ积分表（九）中查得公式 78，即有

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=-\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c}+\frac{b}{2\sqrt{c^3}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C.$$

现在 $a=8$，$b=4$，$c=1$，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{8+4x-x^2}}&=-\frac{\sqrt{8+4x-x^2}}{1}+\frac{4}{2\sqrt{1^3}}\arcsin\frac{2x-4}{\sqrt{4^2+4\times8\times1}}+C\\&=-\sqrt{8+4x-x^2}+2\arcsin\frac{x-2}{2\sqrt{3}}+C.\end{aligned}$$

例 3 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x}$.

解 被积函数含有三角函数，在附录Ⅲ积分表（十一）中查得关于积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ 的公式，但是公式有两个，要看 $a^2>b^2$ 或 $a^2<b^2$ 而决定采用哪一个.

现在 $a=5$，$b=-4$，$a^2>b^2$，所以用公式 105，即有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C\ (a^2>b^2).$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5-4\cos x}=\frac{2}{\sqrt{5^2-(-4)^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{5-(-4)}{5+(-4)}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$$
$$=\frac{2}{3}\arctan\left(3\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

下面再举一个需要先进行变量代换,然后再查表求积分的例子.

例 4 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

解 这个积分不能在表中直接查到,需要先进行变量代换.

令 $2x=u$,则 $\sqrt{4x^2+9}=\sqrt{u^2+3^2}$, $x=\frac{u}{2}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u$, 于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}=\int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{d}u}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2+3^2}}=\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+3^2}}.$$

被积函数中含有 $\sqrt{u^2+3^2}$,在附录Ⅲ积分表(六)中查到公式 40.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{|x|}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

现在 $a=3$, x 相当于 u,于是

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2+3^2}}=\frac{1}{3}\ln\frac{|u|}{3+\sqrt{u^2+3^2}}+C.$$

再把 $u=2x$ 代入,最后得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+9}}=\frac{1}{3}\ln\frac{|2x|}{3+\sqrt{4x^2+9}}+C.$$

一般说来,把被积函数分类按类型查积分表就可以得到积分.但是,只有掌握了前面学过的基本积分方法才能灵活使用积分表,而且对于一些比较简单的积分,有时应用基本积分方法来计算比查表更快些.例如 $\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$,用变换 $u=\sin x$ 很快可得到结果.所以,求积分时,究竟是直接计算还是查表,或者两者结合使用,应作具体分析,不能一概而论.

到现在为止,我们已经基本上学习了求不定积分的常用方法.但是必须注意,我们这

里所谓“求”一个积分,其实质是要用初等函数把这个积分表示出来.在这种意义下,某些初等函数尽管它们的原函数存在,却不一定能求出来.例如下列不定积分

$$\int e^{x^2}\,dx\,,\ \int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx\,,\ \int\frac{dx}{\ln x},\ \int\frac{\sin x}{x}dx.$$

在实际中要用其他方法解决,这里不一一介绍.

习题 4.5

A

利用积分表求下列不定积分.

(1) $\int\frac{1}{x(5x+3)}dx$; (2) $\int\sqrt{3+4x+x^2}\,dx$;

(3) $\int\cos^n x\,dx$; (4) $\int x^2\ln^2 x\,dx$;

(5) $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x-8}}$.

B

利用积分表求下列不定积分.

(1) $\int\frac{dx}{\sin^4 x}$; (2) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9x^2+4}}$.

习题 4.5
参考答案

本章小结

一、学习目标与要求

1. 了解原函数、不定积分的概念及其运算性质.
2. 掌握不定积分的基本公式.
3. 掌握不定积分的换元法和分部积分法.
4. 会用第二换元积分法(限于三角代换,根式代换),会查积分表.

二、本章主要内容

本章的主要内容是:原函数与不定积分的概念,不定积分基本公式和运算性质,不定积分的第一、第二换元积分法,分部积分法,简易积分表的使用.

1. 原函数与不定积分

(1) 原函数

设函数 $f(x)$是定义在区间(a,b)内的已知函数,如果存在函数 $F(x)$,使对于任意的 $x\in(a,b)$,都有

$$F'(x)=f(x) \qquad \text{或} \qquad \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $F(x)$是函数 $f(x)$(在区间(a,b)内)的一个原函数.

关于原函数的问题,还要说明两点:

① 原函数的存在问题:如果 $f(x)$在某区间上连续,那么它的原函数一定存在(将在第五章加以说明).

② 原函数的一般表达式:若 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数,则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$的全部原函数,其中 C 为任意常数.

(2) 不定积分

若 $F(x)$是 $f(x)$在某区间上的一个原函数,则 $f(x)$的全体原函数 $F(x)+C$ (C 为任意常数) 称为 $f(x)$ 在该区间上的不定积分,记作$\int f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

积分运算与微分运算之间有如下的互逆关系:

① $\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]'=f(x)$ 或 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$,此式表明,先求积分再求导数(或求微分),两种运算的作用相互抵消.

② $\int F'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ 或$\int \mathrm{d}F(x)=F(x)+C$,此式表明,先求导数(或求微分)再求积分,两种运算的作用相互抵消后还留有积分常数 C.

需要注意的问题:一个函数的导函数是唯一的,而一个函数的原函数却有无数个,即不定积分是函数的集合,因此在求积分时,一定不能忘记积分常数 C.

2. 不定积分的基本积分公式

不定积分作为导数(或微分)的逆运算引入,因此,在学习不定积分的有关概念和基本积分公式时,可以采取对比学习的方法,加深概念的理解、公式的记忆.

求导公式和基本积分公式不是一一对应的,如求导公式 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ 两个公式被归入一个基本积分公式. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 两个公式被归入一个基本积分公式. 还有两组公式形式上有差异,$\int x^a\mathrm{d}x=$

$\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}+C\ (a\neq -1)$ 与 $(x^a)'=ax^{a-1}$；$\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$ 与 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；值得注意.

3. 不定积分的运算性质

(1) 积分对于函数的可加性，即

$$\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x,$$

该性质可推广到有限个函数代数和的情况，即

$$\int [f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x\pm\int f_2(x)\mathrm{d}x\pm\cdots\pm\int f_n(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 积分对于函数的齐次性，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x,\ k\neq 0.$$

4. 不定积分的几何意义

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，从几何图形上看，$y=F(x)$ 表示一条确定的曲线，称为 $f(x)$ 的一条积分曲线.

由于 C 的任意性，所以 $y=F(x)+C$ 表示的是一簇积分曲线，这簇积分曲线可以由其中任意一条曲线沿着 y 轴向上或向下平移而得到. 因此，在横坐标相同处所有积分曲线的切线彼此平行，这些切线有相同的斜率.

5. 求不定积分的基本方法

(1) 直接积分法：直接利用基本积分公式或对被积函数作适当的变形后再利用基本积分公式求不定积分的方法称为直接积分法.

(2) 第一换元积分法：设函数 $u=\varphi(x)$ 上可微，且 $\displaystyle\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=F[\varphi(x)]+C.$$

(3) 第二换元积分法：设 $x=\varphi(t)$ 单调可导，且 $\varphi'(t)\neq 0$，又设 $f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令}x=\varphi(t)}\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C\xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)}F[\varphi^{-1}(x)]+C.$$

(4) 分部积分法：设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续的导数，则

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

不定积分的计算有较大的灵活性，困难很多，使用方法不当，有时计算量会很大甚至

没有效果，因此要掌握各种方法解决问题的特点，在解题时，才能恰当地选用方法. 第一换元积分法能解决问题的特点是被积函数是复合函数或含有复合函数；第二换元积分法能解决问题的特点是被积函数含有根号；分部积分法能解决问题的特点是被积函数能够表示成两个函数的积，且形如下列类型：

$$x^n\ln x,\ x^n\sin bx,\ x^n\cos bx,\ x^n e^x,\ x^n\arcsin ax,\ x^n\arctan bx.$$

在实际解题时，根据函数形式的不同，可以按以下步骤思考：

（1）首先考虑能否用直接积分法.

（2）其次考虑能否用第一换元积分法（凑微分法）.

（3）再考虑能否用第二换元积分法.

（4）再考虑能否用分部积分法.

（5）能否综合应用和反复使用以上方法.

综合复习题四

A

1. 填空题.

（1）设 $\dfrac{1}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f'(x)=$__________.

（2）设 $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\cos\frac{x}{2}+C$，则 $f(x)=$__________.

（3）$\mathrm{d}x=$__________$\mathrm{d}(2-3x)$.

（4）通过点 $\left(\dfrac{\pi}{6},1\right)$ 的积分曲线 $y=\displaystyle\int\sin x\,\mathrm{d}x$ 的方程是__________.

2. 求下列不定积分.

（1）$\displaystyle\int\sqrt{x}(x-2)\mathrm{d}x$；　　（2）$\displaystyle\int\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$；

（3）$\displaystyle\int\frac{x^3-27}{x-3}\mathrm{d}x$；　　（4）$\displaystyle\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)\mathrm{d}x$；

（5）$\displaystyle\int(\sin x+\cos 2x)\mathrm{d}x$；　　（6）$\displaystyle\int(2^x+e^x)^2\mathrm{d}x$；

（7）$\displaystyle\int\frac{x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　（8）$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}}$；

（9）$\displaystyle\int a^{2x}\mathrm{d}x$；　　（10）$\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(11) $\int x^2\sqrt{3+x^3}\,\mathrm{d}x$；　(12) $\int \dfrac{a^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}x$.

B

1. 填空题.

(1) $\sin\dfrac{x}{3}\mathrm{d}x=$ ________ $\mathrm{d}\left(\cos\dfrac{x}{3}\right)$.

(2) $\int\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ ____________.

(3) 若 $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^{2x}+C$，则 $f(x)=$ ________________.

(4) 已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int\dfrac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=$ ____________.

(5) 设 $\sin 2x$ 是 $f(x)$的一个原函数，则 $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=$ ____________.

2. 求下列不定积分.

(1) $\int\dfrac{1}{4+9x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\int\cos x\cdot\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\dfrac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$；　(4) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$；

(5) $\int\dfrac{1}{\sqrt{4-9x^2}}\mathrm{d}x$；　(6) $\int\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$；　(8) $\int\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(9) $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　(10) $\int(x^2+1)\ln x\,\mathrm{d}x$；

(11) $\int x^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$；　(12) $\int\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

综合复习题四
参考答案

阅读材料四

数学家欧拉——让微积分长大成人

欧拉(Euler，1707—1783)被公认为人类历史上成就最为斐然的数学家之一，另外三

位分别是：阿基米德、牛顿和高斯. 阿基米德有“翘起地球”的豪言壮语，牛顿因为苹果闻名世界，高斯少年时就显露出计算天赋，唯独欧拉没有戏剧性的故事让人印象深刻.

然而，几乎每一个数学领域都可以看到欧拉的名字——初等几何的欧拉线、多面体的欧拉定理、立体解析几何的欧拉变换公式、数论的欧拉函数、变分法的欧拉方程……

法国大数学家拉普拉斯曾说过一句话：“读读欧拉，他是所有人的老师.”相信从欧拉的人生历程中，我们能获得许多启迪和力量.

恩格斯曾说，微积分的发明是人类精神的最高胜利. 1687 年，牛顿和莱布尼茨先后发表了微积分论文，但牛顿、莱布尼茨创建的微积分基础不稳，应用范围也有限. 欧拉和 18 世纪的一批数学家拓展了微积分，产生了“分析学”，使得数学形成了代数、几何、分析三足鼎立的局面. 如果没有他们的工作，微积分不可能春色满园，也许会因打不开局面而荒芜凋零. 欧拉在其中的贡献是基础性的，被尊为“分析的化身”.

在分析学形成之前，数学主要是解决常量、匀速运动问题. 18 世纪时，以蒸汽机、纺织机等机械为主体的技术得到广泛运用，但如果没有微积分、没有分析学，就不可能对机械运动与变化进行精确计算，到现在为止，微积分和微分方程仍然是描写运动的最有效工具，这其中不少是属于欧拉的贡献. 更重要的是，牛顿、莱布尼茨微积分的对象是曲线，而欧拉明确地指出，数学分析的中心应该是函数，并对函数的概念作了深化.

变分法来源于微积分，后来由欧拉和拉格朗日从不同的角度把它发展成一门独立学科，用于求解极值问题. 而变分学起源颇富戏剧性——1696 年，欧拉的老师、巴塞尔大学教授约翰・伯努利提出一个问题，并向其他数学家挑战：设想一个小球从空间一点沿某条曲线滚落到(不在同一垂直线上的)另外一点，问什么形状的曲线使球降落用时最短. 这就是著名的“最速降线问题”.

在这个问题中，变量本身就是函数，因此比微积分的极大极小值问题更为复杂. 这个问题和其他一些类似问题的解决，成为变分法的起源. 欧拉找到了解决这类问题的一般方法，教科书中变分法的基本方程就叫欧拉方程.

欧拉 13 岁上大学时，约翰・伯努利已经是欧洲很有名的数学家，伯努利后来对欧拉说，“我提出高等分析的时候，它还是个孩子，而你正在将它带大成人.”

欧拉渊博的知识、高尚的品德、顽强拼搏的精神，赢得了人们广泛的尊敬.

第五章 CHAPTER 5

定积分及其应用

在本章我们将借助极限这一工具，讨论一元函数微积分的另一重要概念——一元函数的定积分. 与微分不同的是积分处理变量的“积累”问题，而这一问题在物理学、天文、工程、地质学、化学以及生物学中大量出现，我们将介绍反映微分与积分之间联系的重要结果——微积分基本定理，学习常用的积分方法与技巧，认识广义积分.

第一节 定积分的概念

一、两个引例

引例 1 曲边梯形的面积

曲边梯形是指在直角坐标系中，由闭区间$[a, b]$上的连续函数$y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$，直线$x=a$，$x=b$和x轴所围成的平面图形$AabB$，如图 5-1 所示.

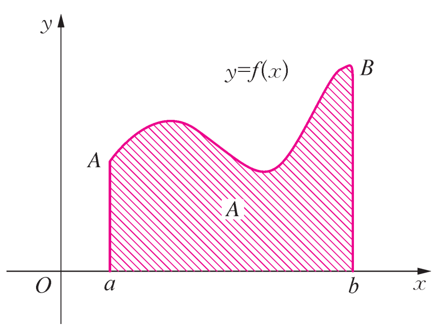


图 5-1

那么如何计算曲边梯形的面积呢？现在我们运用一种全新的思想方法来求解.

由于曲边梯形的高$f(x)$在区

间$[a, b]$上是连续变化的，但在很小的一段区间上它的值变化较小，近似于不变. 那么如果把$[a, b]$划分成好多小区间，此曲边梯形也就可以相应地分割成许多小的曲边梯形，这是第一步——分割；把每一个小的曲边梯形近似看成一个小矩形，这些小曲边梯形的面积就可用一系列的小矩形面积来近似代替，小矩形的宽就是小区间的长度，而高度就可以用该小区间内某点处$f(x)$的值来近似代替，这是第二步——近似代替；在每个小区间上用小矩形面积来近似代替小曲边梯形的面积后，再把所有的小矩形的面积加起来，得到大曲边梯形的一个近似值，这是第三步——近似求和；显然小区间的长度越小，这种近似的精度就越高，当每一个小曲边梯形的宽（小区间长度）无限趋近于零时，那么这些小矩形面积之和就等于大曲边梯形的面积，这是第四步——取极限. 用以上的方法我们就可以得到曲边梯形的面积了.

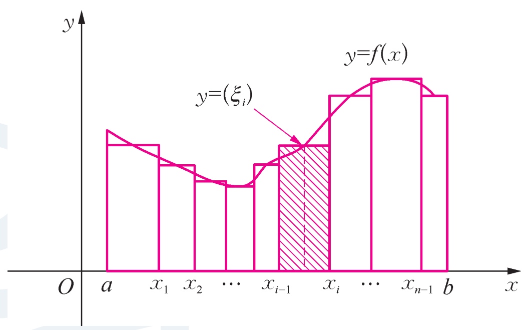


图 5－2

根据以上分析，求曲边梯形面积的步骤可以概括如下（如图 5－2 所示）.

（1）分割：在区间$[a, b]$中任取分割点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把曲边梯形的底$[a, b]$分成 n 个小区间 $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\cdots$, $[x_{i-1}, x_i]$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$，其中，第 i 个小区间为$[x_{i-1}, x_i]$，长度记作 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1, 2, \cdots, n)$. 过各分割点作垂直于 x 轴的直线段，把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形. 其面积分别记为 $\Delta A_i(i=1, 2, \cdots, n)$.

求曲边梯形的面积

（2）近似代替：在第 i 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，用底为 Δx_i、高为 $f(\xi_i)$的矩形面积近似替代小曲边梯形的面积，即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

（3）近似求和：把 n 个小矩形面积相加，就得到整个曲边梯形面积的近似值，即

$$\begin{aligned} A &\approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\cdots+f(\xi_i)\Delta x_i+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n \\ &=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \end{aligned}$$

（4）取极限：分割越细，误差越小，令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，则

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

引例 2　变速直线运动的路程

已知某物体作直线运动，其速度 $v=v(t)$ 是时间$[a, b]$上的连续函数，如何求此物体

在这段时间内所走过的路程呢?

变速直线运动不能直接利用以前所学匀速运动路程计算公式 $s=vt$ 来求路程,但如果经过的时间很短,运动就可近似地看作匀速,由此也可利用求曲边梯形面积的思想方法来解决这一问题,方法如下.

(1) 分割:在区间$[a, b]$中任取时间分割点

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{i-1}<t_i<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

把$[a, b]$分成 n 个小区间$[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\cdots$, $[t_{i-1}, t_i]$, $\cdots$, $[t_{n-1}, t_n]$,其中,第 i 个小区间为$[t_{i-1}, t_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$,长度记为 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}(i=1, 2, \cdots, n)$.

(2) 近似代替:在第 i 个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 ξ_i,把 $v(\xi_i)$ 近似看作$[t_{i-1}, t_i]$时间段中的平均速度,于是在 Δt_i 时间所走位移的近似值为

$$\Delta s_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

(3) 近似求和:把 n 个小时间段上的路程相加得到总位移的近似值,即

$$\begin{aligned} s &\approx v(\xi_1)\Delta t_1+v(\xi_2)\Delta t_2+\cdots+v(\xi_i)\Delta t_i+\cdots+v(\xi_n)\Delta t_n \\ &=\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i. \end{aligned}$$

(4) 取极限:分割越细,路程误差越小,令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$,即

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

从以上引例中我们发现:两个问题其性质是截然不同的.前者是几何学的问题,而后者是物理学的问题,但处理问题运用的方法没有实质的区别.解决问题的结果,从数量角度最终归结为一特定和式的极限问题.事实上,在社会实践和科学实验中,有许多问题如旋转体的体积、非均匀物体的质量、变力作功等,实质是非均匀分布的具有可加性的量的求和问题,对这些量的计算在数量上最终都可以归结为“分割、近似代替、近似求和、取极限”的思想,最后均可表示为同一种结构的和式极限问题.对这些和式的极限的计算,引出了定积分概念的产生.

二、定积分的定义

定义 5.1 设函数 $y=f(x)$ 在区间$[a, b]$上有定义,在$[a, b]$中任取分割点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把区间$[a, b]$分成 n 个小区间,其中,第 i 个小区间为$[x_{i-1}, x_i]$,长度记作

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1} \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，在每个小区间 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上任取一点 ξ_i，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 的和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 如果当 $\lambda\to 0$ 时，上述和式的极限存在，且此极限值不依赖于 ξ_i 的选取和对区间的分法，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上可积，并称此极限值为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

式中称 $f(x)$ 为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量，a，b 分别为积分下限和上限，$[a,\ b]$ 为积分区间.

注： (1) 定积分的计算结果为一数值，仅与积分区间和被积函数有关，而与积分变量用什么记号无关，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

(2) 当函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续或只有有限个第一类间断点(间断点处左、右极限都存在)时，函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上可积.

(3) 定义中有 $a<b$. 当 $a\geqslant b$ 时可补充如下定义：

当 $a=b$ 时，$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$；

当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

例 1 用定积分的定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

解 如图 5-3 所示，因为被积函数 $f(x)=x^2$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，所以可积. 从而定积分的值与区间 $[0,\ 1]$ 的分法及 ξ_i 的取法无关. 为了计算方便，将区间 $[0,\ 1]$ 等分成 n 个小区间，于是每个小区间的长度为：$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$.

分割点为：

$$x_0=0,\ x_1=\frac{1}{n},\ x_2=\frac{2}{n},\ \cdots,\ x_i=\frac{i}{n},\ \cdots,\ x_n=1.$$

为方便，取 ξ_i 为每个区间的右端点，即 $\xi_i=\dfrac{i}{n}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，此时 $\lambda=\dfrac{1}{n}$，当 $\lambda\to 0$，时 $n\to\infty$，于是

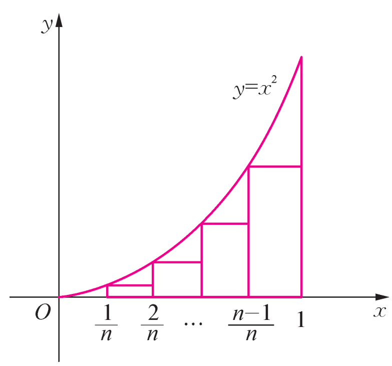


图 5-3

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x &= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

三、定积分的几何意义

(1) 如果函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续且 $f(x) \geqslant 0$,那么定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积,即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$,特别地,$\int_a^b \mathrm{d}x = (b-a)$.

(2) 如果函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续且 $f(x) \leqslant 0$,那么定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积的相反数,即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A$,如图 5-4 所示.

(3) 如果函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续且 $f(x)$有时正,有时负,那么定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于以曲边 $f(x)$ 与直线 $x=a$,$x=b$ 和 x 轴所围成的平面图形面积的代数和,即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -A_1 + A_2 - A_3$,如图 5-5 所示.

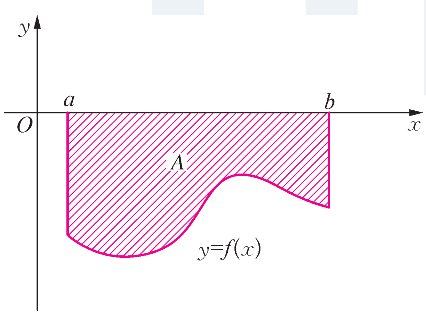


图 5-4

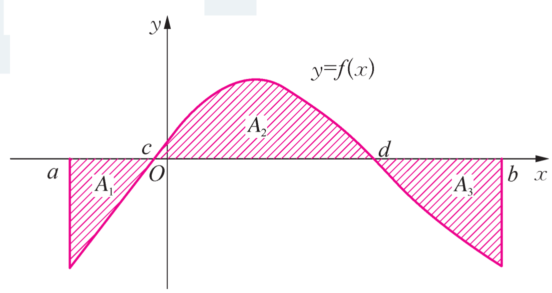


图 5-5

例 2 利用定积分的几何意义求下列定积分.

(1) $\int_{-1}^{1} |x| \mathrm{d}x$;　　　　(2) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

分析 只要能够画出被积函数在给定积分区间上与 x 轴所围成的几何图形,就可利

用定积分的几何意义求定积分.

解 （1）由图 5－6 可知，$\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x$ 的值等于两个直角边为 1 的等腰直角三角形面积之和，即

$$\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

（2）由图 5－7 可知，$\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ 的值是四分之一个圆 $x^2+y^2=4$ 的面积，即

$$\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\pi.$$

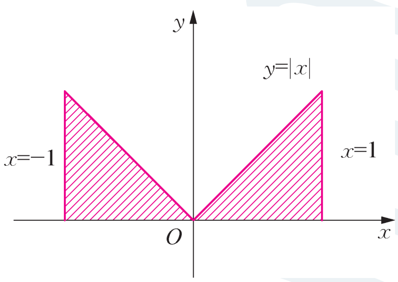


图 5－6

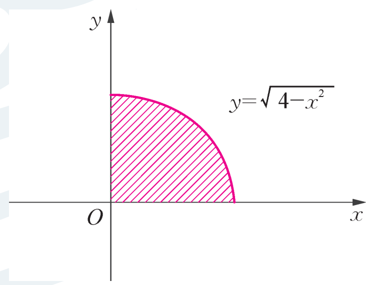


图 5－7

习题 5.1

A

1. 填空题.

（1）在定积分 $\int_{0}^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x$ 中，被积函数是________，积分上限是________，积分下限是________，积分区间是________.

（2）定积分 $\int_{2}^{2}\sin x\mathrm{d}x=$________.

2. 利用定积分的几何意义求下列定积分.

（1）$\int_{0}^{2}5\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_{0}^{2}x\mathrm{d}x$；　　（3）$\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

3. 用定积分表示下列曲线所围平面图形的面积.

（1）由曲线 $y=x^2$，直线 $x=1$，$x=2$ 和 x 轴所围成的平面图形面积.

（2）由曲线 $y=x^2-x-4$，直线 $x=0$，$x=2$ 和 x 轴所围成的平面图形面积.

B

1. 填空题.

(1) 设电流强度 i 为时间 t 的函数 $i=5\sin\omega t$，则从 $t=t_0$ 到 $t=t_1$ 时间段内流过导线横截面的电量 Q 用定积分表示为____________.

(2) 一根质量分布不均匀的细棒位于 x 轴上的区间 $[a,b]$ 处，设棒上任一点的线密度 $\rho=\rho(x)$，该细棒的质量用定积分表示为____________.

(3) 已知放射性物质分解速度 v 是时间 t 的函数 $v=v(t)$，则放射性物质由时间 T_1 到 T_2 所分解的质量 m 用定积分表示为____________.

2. 利用定积分的几何意义求定积分 $\int_0^{2\pi}\cos x\,\mathrm{d}x$.

3. 用定积分表示下列曲线所围平面图形的面积.

(1) 由曲线 $y=x^2$，$y=2-x^2$ 所围成的平面图形面积.

(2) 由曲线 $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$ 所围成的平面图形面积.

习题 5.1
参考答案

第二节 定积分的性质

一、定积分的性质

性质 5.1 两个可积函数代数和的积分等于各个函数积分的代数和：

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明

$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n[f(\xi_i)\pm g(\xi_i)]\Delta x_i\\&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n[f(\xi_i)\Delta x_i\pm g(\xi_i)\Delta x_i]\\&=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\pm\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i\\&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注：此性质可推广到有限多个可积函数代数和的情形，即

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

性质 5.2 被积函数中的常数因子可以提到积分号外，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

其证明方法与性质 5.1 的证明相似，读者可自行证明(以下性质证明均从略).

如果在积分区间上 $f(x)=C$ (C 为常数)，则根据定积分的几何意义得

$$\int_a^b C\mathrm{d}x = C(b-a).$$

性质 5.3(积分区间的可加性) 若 $a<c<b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注：(1) 此性质可利用定积分的几何意义加以解释，如图 5 - 8 所示.

(2) 此性质只说明了 $a<c<b$ 时的情况，实际上在其他任何情况下此性质仍成立.

(3) 如果被积函数是分段函数或绝对值函数，也可用此性质，这时需要将积分区间分成几个区间.

性质 5.4(保序性) 若在$[a, b]$上 $g(x) \leqslant f(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

性质 5.4 的几何意义如图 5 - 9 所示.

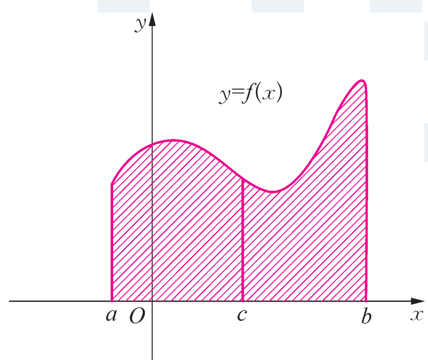


图 5 - 8

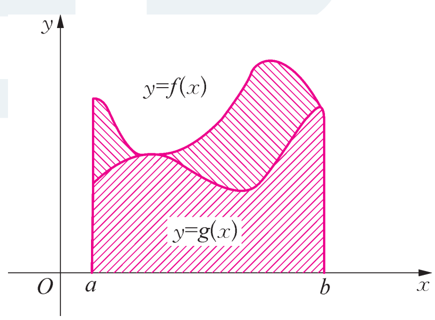


图 5 - 9

性质 5.5(估值性质) 设 M 和 m 分别是 $f(x)$在$[a, b]$上的最大值和最小值，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

比较性质

此性质可利用定积分的几何意义加以说明，如图 5-10 所示.

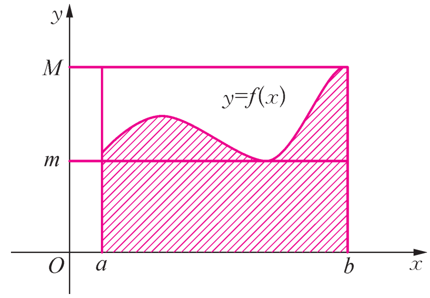


图 5-10

性质 5.6（积分中值定理） 如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in[a, b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

由 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$ 得 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

从数值来说，$f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 就是曲边梯形（图 5-11）的平均高度，也就是 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的所有函数值的平均值 $\bar{y}$，即

$$\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ (x\in[a, b]).$$

所以用定积分可以计算连续函数的平均值.

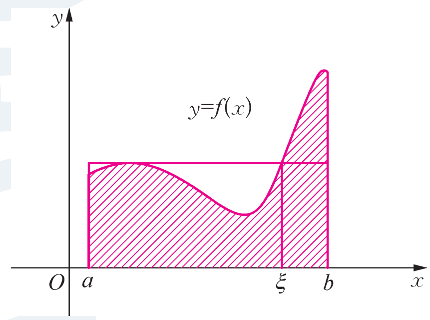


图 5-11

二、定积分性质的应用

例 1 比较下列各对积分值的大小.

(1) $\int_1^3 x^2\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^3 x^3\mathrm{d}x$； (2) $\int_2^3 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ 与 $\int_2^3 \mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为 $x\in[1, 3]$ 时，$x^2\leqslant x^3$，所以由性质 4 得：$\int_1^3 x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_1^3 x^3\mathrm{d}x$.

(2) 因为 $x\in[2, 3]$ 时，$\mathrm{e}^{x^2}\leqslant \mathrm{e}^{x^3}$，所以由性质 4 得：$\int_2^3 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_2^3 \mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$.

(3) 因为在区间 $[1, \mathrm{e}]$ 上，$x\geqslant\ln x$，所以由性质 4 得：$\int_1^{\mathrm{e}} x\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$.

例 2 估计定积分 $\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

分析 此题的关键是要找到被积函数的最大值和最小值.

解 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，则 $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=0$.

计算驻点和积分区间端点处的函数值：

$$f(0)=1,\ f(\pm 1)=\mathrm{e}^{-1},$$

得最小值 $f(\pm 1)=\mathrm{e}^{-1}$，最大值 $f(0)=1$.

由性质 5.5 得

$$\frac{2}{\mathrm{e}}\leqslant\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant 2.$$

例 3 求函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ 在区间$[-3,3]$上的平均值.

解 结合定积分的几何意义得

$$\bar{y}=\frac{1}{3-(-3)}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\times\frac{\pi}{2}\times 3^2=\frac{3}{4}\pi.$$

例 4 利用定积分区间的可加性将下列积分拆成几个定积分和的形式.

(1) $\int_{0}^{2}|x-1|\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0,\\ x^2+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解 (1) 因为 $|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geqslant 1,\\ 1-x, & x<1,\end{cases}$ 于是

$$\int_{0}^{2}|x-1|\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(1-x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(x-1)\,\mathrm{d}x.$$

(2) $\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(x^2+1)\,\mathrm{d}x.$

习题 5.2

A

1. 比较下列各对积分值的大小.

(1) $\int_{0}^{1}x^2\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_{0}^{1}x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{1}^{3}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_{1}^{3}x^3\,\mathrm{d}x$.

2. 估计定积分 $\int_{-2}^{3}x^2\,\mathrm{d}x$ 的值.

3. 计算函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ 在区间$[0,3]$上的平均值.

4. 利用定积分区间的可加性将下列积分拆成几个定积分和的形式.

(1) $\int_{-2}^{2}|x|\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x \leqslant 0, \\ \sin x, & x>0. \end{cases}$

B

1. 比较下列各对积分值的大小.

(1) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{\mathrm{e}} \ln^3 x\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$.

2. 估计定积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的值.

3. 计算函数 $f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$ 在区间 $[0, a]$ 上的平均值.

4. 利用定积分区间的可加性将下列积分拆成几个定积分和的形式.

(1) $\int_1^3 |x-2|\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-4}^{1} f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & x<0, \\ \ln(x+1), & x \geqslant 0. \end{cases}$

习题 5.2
参考答案

第三节 微积分基本公式

在前面两节我们学习了定积分的定义和性质，如果要用定积分解决实际问题，首先应解决的是如何计算定积分，而用定义去计算将会十分繁琐、困难，有时甚至可能无法计算，利用定积分的性质也只能求得估值，无法得到准确值. 本节将给出一个计算定积分简便有效的公式——微积分基本公式.

我们先回顾变速直线运动的路程问题，如果物体以速度 $v=v(t)(v(t)>0)$ 作直线运动，那么在时间区间 $[a, b]$ 上经过的路程为

$$s=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t.$$

另一方面，如果物体经过的路程 s 是时间 t 的函数 $s=s(t)$，那么物体从 $t=a$ 到 $t=b$，即在时间区间 $[a, b]$ 上所经过的路程应该是

$$s(b)-s(a),$$

即 $$\int_a^b v(t)\mathrm{d}t = s(b) - s(a).$$

由导数的物理意义可知，$s'(t)=v(t)$，换句话说 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的一个原函数. 说明定积分 $\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$ 的值可等于被积函数 $v(t)$ 的原函数 $s(t)$ 在积分上限的值减去积分下限的值，即 $s(b)-s(a)$.

一般地，有下面的定理.

定理 5.1（微积分基本公式） 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上任一原函数，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \quad \text{（证明从略）}.$$

该定理揭示了定积分与被积函数的原函数（即不定积分）之间的内在联系，求定积分的关键是要求出被积函数的原函数，为定积分的计算提供了简便有效的方法，因此称为微积分基本公式，这个公式是由牛顿和莱布尼茨在同一时期内相继独立发现的，因此又称为牛顿-莱布尼茨（Newton-Leibniz）公式.

为了书写方便，可以将微积分基本公式写成如下形式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{或} \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

例 1 求下列定积分.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$.

(3) $\int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = 1$.

(4) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 0 = \frac{\pi}{3}$.

例 2 求下列定积分.

(1) $\int_1^3 |x-2|\,\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-2}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases} x^2, & -2\leqslant x\leqslant 0, \\ \cos x+1, & 0<x\leqslant \pi. \end{cases}$

解 (1) $\int_1^3 |x-2|\,\mathrm{d}x=\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x+\int_2^3(x-2)\mathrm{d}x$

$$=\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2+\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\Big|_2^3$$

$$=\left(4-2-2+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{9}{2}-6-2+4\right)=1.$$

(2) $\int_{-2}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}x^2\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}(\cos x+1)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}+(\sin x+x)\big|_0^{\pi}=\frac{8}{3}+\pi.$

习题 5.3

A

1. 求下列函数的定积分.

(1) $\int_0^2 x^5\mathrm{d}x$；

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^2 \frac{t^2-1}{t}\mathrm{d}t$；

(4) $\int_1^4 \sqrt{x}(x^2-1)\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-1}^{2}(x^2-x)\mathrm{d}x$.

2. 求下列函数的定积分.

(1) $\int_{-1}^{1}(|x|-x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x-1, & -1\leqslant x<0. \end{cases}$

B

1. 求下列函数的定积分.

(1) $\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$.

2. 求下列函数的定积分.

(1) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{|\ln x|}{x} dx$;

(2) $\int_{-1}^{1} f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x+1, & -2 \leqslant x < 0. \end{cases}$

习题 5.3
参考答案

第四节 定积分的换元积分法和分部积分法

应用微积分基本公式计算定积分,应先求出被积函数的原函数,即求不定积分,类似于不定积分的换元积分法和分部积分法,本节介绍定积分的换元积分法和分部积分法.

一、定积分的换元积分法

例 1 计算 $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$.

解法 1 先用换元积分法求不定积分:

令 $\sqrt{1+x} = t$,即 $x = t^2 - 1$,则 $dx = 2t dt$,于是

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \int \frac{t^2-1}{t} 2t dt = 2\int (t^2-1) dt = 2\frac{t^3}{3} - 2t + C$$

$$= 2\frac{(\sqrt{1+x})^3}{3} - 2\sqrt{1+x} + C,$$

所以
$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \left(2\frac{(\sqrt{1+x})^3}{3} - 2\sqrt{1+x}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{8}{3}.$$

这一方法有求不定积分换元和求定积分两个过程,而且求不定积分时,用换元积分法最后还要将不定积分的积分变量还原回去. 下面,我们把换元和求定积分揉在一起,得到如下解法.

解法 2 先令 $\sqrt{1+x} = t$,即 $x = t^2 - 1$,则 $dx = 2t dt$.

当 $x = 0$ 时,$t = 1$;$x = 3$ 时,$t = 2$.

于是

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t}2t\,\mathrm{d}t = 2\int_1^2 (t^2-1)\mathrm{d}t = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

解法 2 明显要比解法 1 简练,是因为它省略了积分变量回代的这一步. 由此引出如下定理.

定理 5.2(定积分的换元积分法) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,而 $x=\varphi(t)$ 满足条件:

(1) $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有单调连续的导数.

(2) 当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时,$x=\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化,且 $\varphi(\alpha)=a$,$\varphi(\beta)=b$.

则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这就是定积分换元公式(证明从略).

注: (1) 定理中第一个条件是为了保证 t 与 x 的一一对应法则.

(2) 换元时应遵守的一个原则,原上限对应新上限,原下限对应新下限,换元必换限.

(3) 换元公式可从左到右(对应不定积分的第二换元积分法),也可从右到左(对应不定积分的第一换元积分法).

例 2 求定积分.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x\,\mathrm{d}(\ln x) \xlongequal{u=\ln x} \int_{-1}^{1} u\,\mathrm{d}u = \left(\frac{u^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0.$

(2) 设 $\sin x = u$,即 $\mathrm{d}u=\cos x\,\mathrm{d}x$,当 $x=0$ 时,$u=0$;当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时,$u=1$,于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}(\sin x) = \int_0^1 u^2\,\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(3) 设 $\sqrt{e^x-1}=t$,即 $x=\ln(t^2+1)$,$\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

当 $x=\ln 2$ 时,$t=1$;当 $x=0$ 时,$t=0$,于是

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t = 2(t-\arctan t)\Big|_0^1 = 2-\frac{\pi}{2}.$$

*例 3 设函数 $f(x)$ 在对称区间 $[-a, a]$ 上连续，求证：

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$；

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$（如图 5 - 12 所示）；

(3) 当 $f(x)$ 为偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$（如图 5 - 13 所示）.

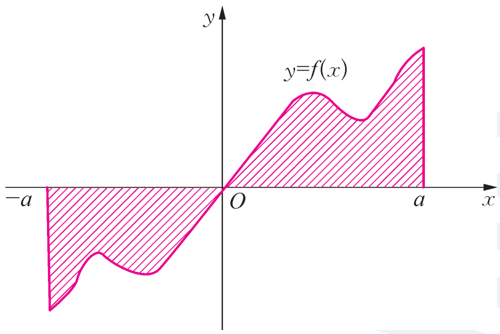


图 5 - 12

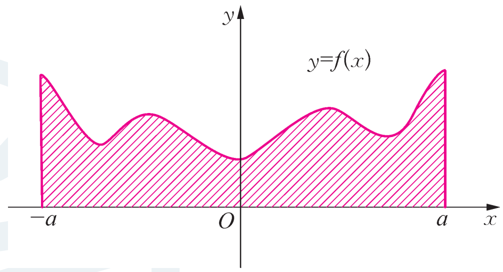


图 5 - 13

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

令 $x=-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-x)\mathrm{d}x,$$

所以
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x.$$

(2) 当 $f(x)$ 为奇函数时，$f(-x)=-f(x)$，

即
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(3) 当 $f(x)$ 为偶函数时，$f(-x)=f(x)$，

即
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

注：此例可以作为结论（利用定积分几何意义也能得到）在解题时使用，其条件是满足对称区间上的奇（偶）函数且连续.

例 4 计算如下定积分.

(1) $\int_{-1}^{1} \dfrac{x^2\sin x}{\cos x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1}^{1} \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 显然被积函数是一个奇函数，且积分区间为对称区间，所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\sin x}{\cos x^2}\mathrm{d}x=0.$$

（2）显然被积函数是一个偶函数，且积分区间为对称区间，所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x.$$

令 $x=2\sin t$，则 $\mathrm{d}x=2\cos t\,\mathrm{d}t$，即

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\sin^2 t}{2\cos t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t=4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2\pi}{3}-2\sin 2t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

二、定积分的分部积分法

定理 5.3（定积分的分部积分法） 设函数 $u(x)$，$v(x)$在$[a,b]$上具有连续导数，则有

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

定积分的分部积分法的实质就是将不易求函数的定积分转化为易求函数的定积分（证明从略），应用特型与不定积分类同.

例 5 求下列定积分.

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_1^{\mathrm{e}} 2x\ln x\,\mathrm{d}x$.

解 （1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}\cos x=-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x$

$$=0+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.$$

（2）$\int_1^{\mathrm{e}} 2x\ln x\,\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x^2=x^2\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}+\frac{1}{2}.$$

例 6 计算 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 先令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，当 $x=1$ 时，$t=1$；当 $x=0$ 时，$t=0$，于是

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^1 t e^t\,dt = 2\int_0^1 t\,de^t = 2te^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t\,dt = 2e - 2e^t\Big|_0^1 = 2.$$

习题 5.4

A

1. 计算下列函数的定积分.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x\,dx$；　(2) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$；

(3) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln^4 x}{x}\,dx$；　(4) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

2. 计算下列函数的定积分.

(1) $\int_1^e \ln x\,dx$；　(2) $\int_0^1 x e^x\,dx$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx$；　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$.

B

1. 计算下列函数的定积分.

(1) $\int_0^{\ln 2} e^x(1+e^x)^2\,dx$；　(2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} 2x\sqrt[3]{x^2+1}\,dx$；

(3) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dx$；　(4) $\int_{-\sqrt{2}}^{-2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

2. 计算下列函数的定积分.

(1) $\int_0^1 x\arctan x\,dx$；　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x\,dx$.

习题 5.4
参考答案

*第五节 广义积分

前几节我们所讨论的定积分，都是假定被积函数（如果可积）在积分区间上是有界的，或积分区间是有限的，此类积分叫做常义积分. 在理论和实际问题中，如果去掉这两个条件的限制，定积分概念可推广到如下两种情形：

（1）无限区间上的积分.

（2）无界函数的积分.

以上两种情形，我们都称之为广义积分. 下面我们来讨论这两种情形下的广义积分问题.

一、无限区间上的广义积分

例 1 求由曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$，直线 x 轴、$x=1$，$x=a$ $(a\geqslant 1)$ 所围成的平面图形的面积.

解 根据定积分的几何意义，其面积为

$$S(a)=\int_1^a \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{a}.$$

在当 $a\to+\infty$ 时，$\lim\limits_{a\to+\infty} S(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=1.$

显然，这一极限可以理解为曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 与 x 轴及直线 $x=1$ 所围的右方无限延展的区域面积.

如果对曲线 $y=\dfrac{1}{x}$，$x>1$，考察同样的问题：

$$S(a)=\int_1^a \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln a.$$

当 $a\to\infty$ 时，明显地 $\lim\limits_{a\to\infty}\ln a$ 是不存在的，在这种情形下，无限延展的区域就没有有限的面积了. 因而我们有如下定义.

定义 5.2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内连续，取 $b>a$，称极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为 $f(x)$在$(a,+\infty)$内的广义积分，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若此极限存在，称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，若此极限不存在，称广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，这时虽仍用同样的记号，但已不表示数值了.

类似地可以定义广义积分：

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x,\ c\in(-\infty,+\infty);\end{aligned}$$

当 $\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

无穷限的反常积分的定义

例 2 求下列广义积分.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan b=\frac{\pi}{2}$；

(2) $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_a^0=\lim\limits_{b\to-\infty}-\arctan a=\frac{\pi}{2}$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi.$

二、无界函数的广义积分

若被积函数在有限区间$[a,b]$上无界，我们利用先求定积分再求极限的思想方法给出如下定义.

定义 5.3 设函数 $f(x)$在$(a,b]$内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$，取 $\varepsilon>0$，称极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在$(a,b]$ 内的广义积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若此极限存在，称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，若此极限不存在，称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散. $x=a$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，也称为函数的奇点. 类似地可以定义 $x=b$ 和 $x=c$ $(a<c<b)$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点时的广义积分：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x;$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

无界函数的广义积分是指被积函数在所给的区间上有有限个无穷间断点，此广义积分又叫瑕积分，无穷间断点又叫瑕点.

例 3 计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $x=1$ 为被积函数的瑕点，则

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}\\&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

例 4 计算 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 $x=0$ 为被积函数的瑕点，则

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x&=\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^1\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\varepsilon}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=+\infty.\end{aligned}$$

如果按普通定积分计算(不考虑瑕点)，会得到如下结果

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1}=-2.$$

此结果从定积分的几何意义上来判断显然是不正确的.

习题 5.5

A

1. 计算下列广义积分.

(1) $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$；　(2) $\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$.

2. 计算下列广义积分.

(1) $\int_{0}^{+4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$；　(2) $\int_{0}^{1} x\ln x\,dx$.

B

1. 计算下列广义积分.

(1) $\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$；　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$.

2. 计算下列广义积分.

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2 x\,dx$；　(2) $\int_{0}^{\pi} \csc^2 x\,dx$.

习题 5.5
参考答案

第六节 定积分的应用

定积分概念的内涵，揭示了定积分的应用特征——可求分布不均匀的具有可加性的量.定积分在几何物理、工程技术、经济等领域应用非常广泛，其中微元分析法是普遍采用的分析方法.

一、微元分析法

通过前面定积分的学习，知道定积分的计算过程分为四步：分割、近似代替、近似求和、取极限.第一步有两个特点：一是与积分区间有关，二是积分区间具备可加性，分割后的每一个部分量(小曲边梯形)ΔA_i，实际上是总量(面积 A)的一个很微小部分.第二步就是分布不均匀近似看成均匀(以直代曲)求每一个部分量(小曲边梯形)ΔA_i 的大小，这一

步实际上确定了被积表达式 $f(x)\mathrm{d}x$. 显然 $f(x)\mathrm{d}x$ 和 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 都代表了部分量的大小，为突出其重要性，称 $f(x)\mathrm{d}x$ 为(面积)微元(图 5－14). 第三、四步可以合并为面积微元在积分区间上的无限累加，即

$$A=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

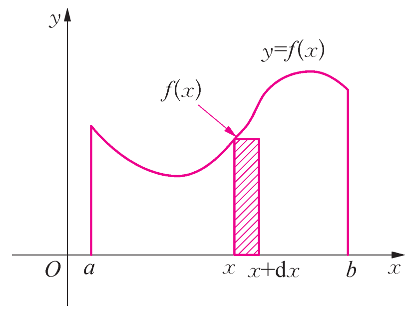


图 5－14

由此，只要所求的量 Q 可以用分割、近似代替、近似求和、取极限四步完成，就一定可以用定积分形式来进行计算. 应用定积分，先要用微元分析法，把所求量 Q 转化为定积分，可概括为以下几步.

(1) 建立适当的直角坐标系，根据影响量 Q 变化的量(x 或 y)，确定积分变量为 x(或 y)及积分区间$[a, b]$.

(2) 计算 $[x, x+\mathrm{d}x]$(或$[y, y+\mathrm{d}y]$) 上所求量 Q 的微元(近似代替)

$$\mathrm{d}Q=f(x)\mathrm{d}x \qquad 或 \qquad \mathrm{d}Q=\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

如何利用微元法求解问题

(3) 将微元 $\mathrm{d}Q$ 从 a 到 b 无限累加，得

$$Q=\int_a^b \mathrm{d}Q=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad 或 \qquad Q=\int_a^b \mathrm{d}Q=\int_a^b \varphi(y)\mathrm{d}y.$$

二、定积分在几何上的应用

1. 平面图形的面积

根据定积分的几何意义，当被积函数 $f(x)$在积分区间$[a, b]$上大于零时，那么定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 等于以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积，即 $A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b y\mathrm{d}x$. 当被积函数 $f(x)$ 在积分区间$[a, b]$ 上小于零时，那么以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于为 $A=\int_a^b [-f(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b (-y)\mathrm{d}x$. 当被积函数 $f(x)$ 在积分区间$[a, b]$ 上有正有负时(图 5－15)，那么以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积为 $A=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b |y|\mathrm{d}x$.

当平面图形是由两条曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$($x\in[a, b]$) 及直线 $x=a$, $x=b$ 所围成的，且 $f(x)\geqslant g(x)$(图 5－16)，则其面积为 $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$，其中面积微元为 $\mathrm{d}A=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

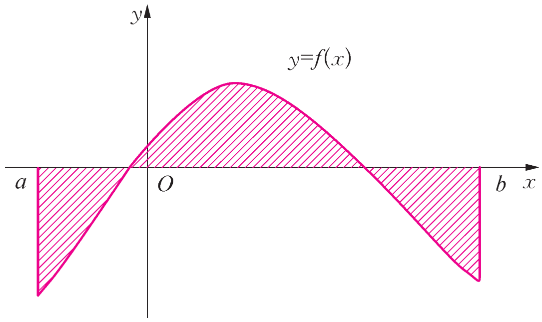


图 5 - 15

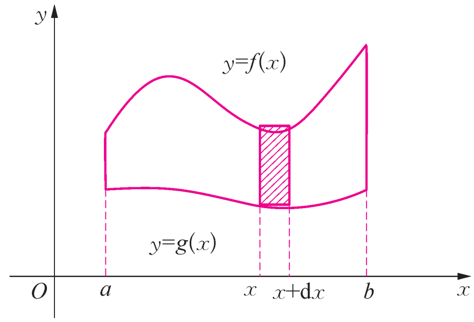


图 5 - 16

类似地可以得到连续曲线 $x=\varphi(y)$，$y=c$，$y=d$ 及 y 轴所围成平面图形的面积为 $A=\int_c^d|\varphi(y)|\mathrm{d}y=\int_c^d|x|\mathrm{d}y$（图 5 - 17）；由两条曲线 $x=\varphi(y)$ 与 $x=\psi(y)$（$y\in[c,d]$）及直线 $y=c$，$y=d$ 所围成的平面图形，且 $\varphi(y)\geqslant\psi(y)$，则其面积为 $A=\int_c^d[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y$，其中面积微元为 $\mathrm{d}A=[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y$（图 5 - 18）.

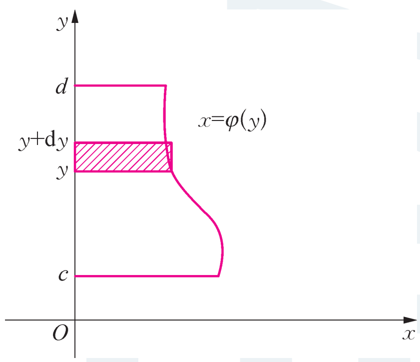


图 5 - 17

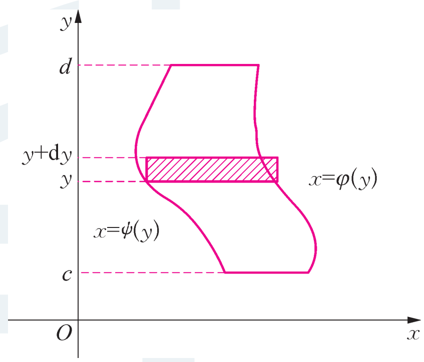


图 5 - 18

例 1 求由两条抛物线 $y=x^2$，$y^2=x$ 所围成的平面图形面积.

解 解方程组 $\begin{cases}y^2=x,\\ y=x^2\end{cases}$ 得交点 $(0,0)$，$(1,1)$.

取 y 为积分变量，则图形面积为

$$A=\int_0^1(\sqrt{y}-y^2)\mathrm{d}y=\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

例 2 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $(a>0,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 一拱与 x 轴围成图形的面积.

解 如图 5 - 19 所示，显然所求面积为

$$A=\int_0^{2\pi a} y\,\mathrm{d}x$$

将 $x=a(t-\sin t)$ 和 $y=a(1-\cos t)$ 代入积分公式，当 $x=0$ 时 $t=0$，$x=2\pi a$ 时 $t=2\pi$，于是

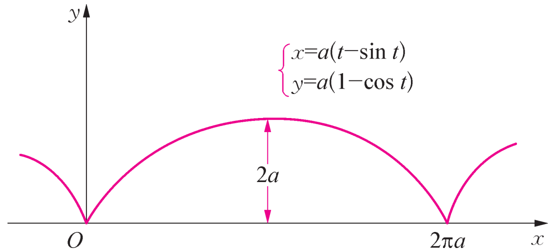


图 5－19

$$A=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t=3\pi a^2.$$

2. 旋转体的体积

设一旋转体是由一条曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geqslant 0)$ 与三条直线 $x=a$，$x=b$，x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的(图 5－20)，现利用微元分析法来求此旋转体的体积 V.

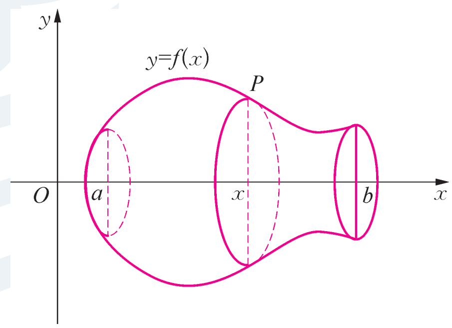


图 5－20

确定积分变量为 x，积分区间为$[a,b]$，过 x 点且垂直于 x 轴的截面面积为

$$A(x)=\pi\,|\,f(x)\,|^2=\pi f^2(x).$$

在区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上的微元 $\mathrm{d}V=A(x)\mathrm{d}x=\pi f^2(x)$(把微小旋转体近似为以 $A(x)$ 为底面、$\mathrm{d}x$ 为高的圆柱)，于是

$$V=\int_a^b \mathrm{d}V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x.$$

同理知，由一条曲线 $x=\varphi(y)$ 与三条直线 $y=c$，$y=d$，y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积为

$$V=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y=\pi\int_c^d x^2\mathrm{d}y.$$

例 3 求由曲线 $y=x^3$ 与直线 $x=2$，$y=0$ 所围成的平面图形分别绕 x 轴、y 轴旋转所形成的旋转体体积.

解 绕 x 轴旋转时，选取 x 为积分变量，积分区间为$[0,2]$，由公式得

$$V=\pi\int_0^2 y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2 x^6\mathrm{d}x=\frac{128}{7}\pi.$$

绕 y 轴旋转时可看成由直线 $x=2$ 及曲线 $x=\sqrt[3]{y}$ 分别与 y 轴形成的曲边梯形绕 y 轴旋转而成的旋转体体积之差，于是

$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^8 2^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^8(\sqrt[3]{y})\mathrm{d}y=20\pi.$$

三、定积分在物理学中的简单应用——变力作功

例 4 由胡克定律知，把弹簧拉长所需要的力与弹簧的伸长成正比，现用 1 N 的力使弹簧伸长 0.01 m，求把该弹簧拉长 0.1 m 所作的功.

解 设弹簧的一端固定，建立直角坐标系，原点 O 为弹簧不受力时另一端的位置.

由胡克定律知 $F(x)=kx$，其中 k 为比例常数，已知 $F(x)=1$ N 时，$x=0.01$ m，于是

$$k=\frac{1}{0.01}=100\ \mathrm{N/m},$$

即
$$F(x)=100x.$$

用微元分析法解决此问题，则有如下步骤.

(1) 取积分变量 x，积分区间为$[0,\ 0.1]$.

(2) 在$[x,\ x+\mathrm{d}x]$上求弹性力所作功的微元，$\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x=100x\,\mathrm{d}x$（将$[x,\ x+\mathrm{d}x]$上的弹性力看成恒力，点 x 处的弹性力为 $F(x)$.

(3) 求定积分，即

$$W=\int_0^{0.1}100x\,\mathrm{d}x=50x^2\Big|_0^{0.1}=0.5(\mathrm{J}).$$

四、定积分在经济分析中的应用

已知某商品的总收益 $R_T(Q)$的边际收益为 $R_M(Q)$，则销售 N 个单位时的总收益为

$$R_T(Q)=\int_0^N R_M(Q)\mathrm{d}Q.$$

在经济分析中，由边际函数求总函数（即原函数），一般采用不定积分来解决；如果要求总函数在某个范围的改变量，则采用定积分来解决.

例 5 某产品的总成本 $C_T(Q)$（单位：万元）的边际成本为 $C_M(Q)=1$（万元/百台），总收入 $R_T(Q)$（单位：万元）的边际收入 $R_M(Q)=5-Q$（单位：万元／百台），其中 Q 为产量，固定成本为 1 万元. 问：

(1) 当产量等于多少时总利润 $L(Q)$最大？

(2) 从总利润最大时再多生产 1 百台，总利润增加多少？

解 (1) 因为 $C_M(Q)=1$，故

$$C_T(Q)=\int 1\mathrm{d}Q=Q+C,$$

因其固定成本为 1 万元，即 $C_T(0)=1$，得 $C=0$，因此总成本函数为

$$C_T(Q)=Q+1.$$

因为边际收入 $R_M(Q)=5-Q$，则总收入函数为

$$R_T(Q)=\int R_M(Q)\mathrm{d}Q=\int(5-Q)\mathrm{d}Q=5Q-\frac{1}{2}Q^2+C.$$

又 $R_T(Q)\big|_{Q=0}=0$，得 $C=0$，故总收入函数为

$$R_T(Q)=5Q-\frac{1}{2}Q^2.$$

设总利润为 $L(Q)$，则

$$L(Q)=R_T(Q)-C_T(Q)=5Q-\frac{1}{2}Q^2-Q-1=4Q-\frac{1}{2}Q^2-1.$$

易知 $L'(Q)=4-Q$，令 $L'(Q)=0$，得 $Q=4$(百台)。

因此点是唯一的极值点，且是极大值点，则在 $Q=4$(百台)时总利润最大.

(2) 从 $Q=4$ 百台增加到 $Q=5$ 百台时，总利润的增加量为

$$\int_4^5 L'(Q)\mathrm{d}Q=\int_4^5(4-Q)\mathrm{d}Q=\left(4Q-\frac{1}{2}Q^2\right)\Big|_4^5=-0.5(\text{万元}),$$

即从总利润最大时再多生产 1 百台，总利润减少了 0.5 万元.

习题 5.6

A

1. 求由下列曲线所围成平面图形的面积.

(1) $y=x^3$, $y=2x$;

(2) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $xy=2$, $x=1$, $x=2$.

2. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积.

3. 求由下列曲线所围平面图形绕坐标轴旋转一周而成的旋转体体积.

(1) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，绕 x 轴；　(2) $y=x^2$, $y=2x$，绕 y 轴；

(3) $y=x^2$, $y=2$，绕 x 轴；　(4) $y=\sqrt{x}$, $y=x$，绕 x 轴.

B

1. 求由下列曲线所围成平面图形的面积.

(1) $y=e^{x}$, $y=e^{-x}$, $x=1$;

(2) $x^{2}+y^{2}=3x$, $x^{2}+y^{2}=\sqrt{3}y$.

2. 求圆 $(x-5)^{2}+y^{2}=9$ 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积.

习题 5.6
参考答案

本 章 小 结

一、学习目标与要求

1. 正确理解定积分的概念及其基本性质和几何意义,了解定积分与不定积分、微分与积分之间的内在联系.

2. 能熟练运用微积分基本公式计算定积分.

3. 能运用定积分换元积分法和分部积分法计算定积分.

4. 了解两类广义积分的概念,会求简单的广义积分(选学内容).

5. 了解定积分的微元分析法建立定积分的表达式,会求直角坐标系中简单平面图形的面积和旋转体的体积(选学内容).

二、本章主要内容

本章的主要内容是定积分的概念、性质、计算方法,以及定积分在几何方面的简单应用.

1. 定积分的定义

从两个典型的实际问题——求曲边梯形的面积和求变速直线运动的位移引出定积分的定义,简述为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\left(\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\right).$$

上式体现了定积分分割、近似代替、近似求和、取极限四个步骤,反映了无限分割与无限求和的思想,定积分是积分和式的极限,它与积分区间$[a,b]$的分法及对点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$的取法无关,也与积分变量的记号无关,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

显见,定积分的值与被积函数 $f(x)$及区间$[a,b]$长短有关,定积分是数值,不定积分是函数族,定积分的几何意义是曲边梯形的面积.

2. 定积分的简单性质

(1) $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm g(x)\mathrm{d}x.$

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$，特别地：$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$.

(3) $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(4) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

(5) $\int_a^b 1\mathrm{d}x=b-a$.

(6) 若 $f(x)\geqslant g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,(b\geqslant a)$.

(7) $m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$，其中 m，M 分别为 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值.

(8) 若 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则必有 $a\leqslant\xi\leqslant b$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

上述性质均可从定积分的定义直接推得.

3. 定积分与不定积分的关系——微积分基本公式

若 $f(x)$是连续函数，$F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

这样就可以利用不定积分计算函数在区间上的定积分.

4. 定积分的计算

(1) 定积分的换元积分法

若 $\varphi(t)$ 在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上单调且有连续导数，$f(x)$ 在 $x=\varphi(t)$ 处连续，又有 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(2) 定积分的分部积分法

设 $u(x)$，$v(x)$在$[a,b]$上有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

或者简单记作

$$\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u.$$

*5. 广义积分是定积分的推广(分为两方面)

(1) 无限区间上的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若等式右边的极限存在,则称广义积分收敛,否则称其发散.

(2) 无界函数的广义积分

设 $f(x)$在区间$(a, b]$上连续,而 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$,则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

若等式右边的极限存在,则称广义积分收敛,否则称其发散.这里 $x=a$ 为瑕点.可类似地定义 $x=b$ 为瑕点出现在区间$[a, b)$内的广义积分.

*6. 定积分在几何中的应用

(1) 在直角坐标中:

由 $y_1=f(x)$,$y_2=g(x)(y_1>y_2)$ 及 $x=a$,$x=b$ 所围成的平面图形的面积为

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x;$$

由 $x_1=\phi(y)$,$x_2=\varphi(y)(x_1>x_2)$ 及 $y=c$,$y=d$ 所围成的平面图形的面积为

$$A=\int_c^d [\phi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y.$$

(2) $y=f(x)$在$[a, b]$上连续,平面区域$\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b, \\ 0\leqslant y\leqslant |f(x)| \end{cases}$绕 x 轴旋转一周所形成的立体的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

综合复习题五

A

1. 填空题.

(1) $\int_5^5 \mathrm{d}x=$________,$\int_0^5 \mathrm{d}x=$________.

(2) 设函数 $f(x)=\sin x$，则 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值 $\bar{y}=$______.

(3) 积分 $\int_1^3 e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}\mathrm{d}x$ 经过 $u=\dfrac{x-1}{2}$ 代换后，变量 u 的积分上限是______，积分下限是______.

(4) 已知 $f(x)=2x^2-3x-1$，则 $\int_0^2 xf''(x)\mathrm{d}x=$______.

(5) $\int_2^5 |x-3|\mathrm{d}x=$______.

(6) 已知 $v(t)=t^2+1$，在时间间隔 $[0,5]$ 上，物体的位移 $s=$______.

2. 选择题.

(1) 设圆 $x^2+y^2=25$ 的面积为 S，则 $\int_{-5}^5\sqrt{25-x^2}\mathrm{d}x=$(　　).

A. S　　B. $\dfrac{S}{2}$　　C. $\dfrac{S}{4}$　　D. $\dfrac{S}{8}$

(2) 曲线 $y=\sin x$，$x=-\dfrac{\pi}{2}$，$x=0$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

(3) 由曲线 $y=x^2$，$y=4$ 所围成的平面图形，绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为(　　).

A. 64π　　B. 256π　　C. $\dfrac{256}{5}\pi$　　D. 128π

(4) 在牛顿-莱布尼茨公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$ 中的 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上应(　　).

A. 连续　　B. 一定可导　　C. 一定可微　　D. 无条件限制

(5) $\int_0^2 e^x\mathrm{d}x=$(　　).

A. e^2　　B. e^2-1　　C. e^x+C　　D. $1-e^2$

3. 解答题.

(1) 求由曲线 $y=x^2$ 与直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形的面积.

(2) 求曲线 $y=\sqrt{25-x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所得几何体的体积.

B

1. 填空题.

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值 $\bar{y}$ 是______.

(2) $\int_{-5}^{5}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t=$________.

(3) 已知 $f(x)=\cos x$，则$\int_0^{\pi}xf(x)\mathrm{d}x=$________.

(4) $\int_2^5 x\,|x-3|\,\mathrm{d}x=$________.

(5) 广义积分 $\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=$________.

2. 选择题

(1) 设圆 $x^2+y^2=a^2$ 的面积为 S，则$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=$(　　).

A. S　　B. $\frac{S}{2}$　　C. $\frac{S}{4}$　　D. $\frac{S}{8}$

(2) 广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$ 的值为(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 发散

(3) 曲线 $y=\sin x$，$x=-\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{\pi}{2}$ 及 x 轴围成的平面图形的面积为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

(4) 由曲线 $y=x^2+2$，$y=6$ 所围成的平面图形，绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为(　　).

A. 32π　　B. 16π　　C. 8π　　D. 4π

(5) $\int_0^2 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$(　　).

A. $2\mathrm{e}^2$　　B. $2\mathrm{e}^2-1$　　C. $x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$　　D. $1+\mathrm{e}^2$

3. 解答题

(1) 求函数 $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值.

(2) 求曲线 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 绕 x 轴旋转一周所得几何体的体积.

综合复习题五
参考答案

阅读材料五

莱布尼茨与微积分

莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716)生于德国，早年在莱比锡大学学

习. 1672 年,他以外交官的身份出访法国,在巴黎接触到一些数学名流, 1673 年出访英国伦敦时,又与英国学术界名流建立了联系,特别是和惠更斯的交往,使年青的莱布尼茨产生了学习高等数学的念头,进而进入数学领域,开始微积分的创造性工作. 1674 年他定居德国汉诺威,任腓特烈公爵法律顾问和图书馆馆长,直到 1716 年去世. 莱布尼茨曾历任英国皇家学会会员、巴黎科学院院士,创建柏林科学院并担任第一任院长.

1684 年,莱布尼茨发表了数学史上第一篇正式的微积分论文《一种求极大值、极小值和切线的新方法》. 这篇论文是他自 1673 年以来的微积分研究的概括与成果,其中定义了微分,广泛地采用了微分符号 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$,还给出了和、差、积、商及乘幂的微分法则,同时包括了微分法在求切线、极大值、极小值及拐点方面的应用. 两年后,他又发表了一篇积分学论文《探奥几何与不可分量及无限的分析》,其中首次使用积分符号"$\int$",初步论述了积分(或求积)问题与微分求切线问题的互逆问题,为我们勾画了微积分学的基本雏形和发展蓝图.

牛顿建立微积分主要是从运动学的观点出发,而莱布尼茨则是从哲学的和几何学的角度去考虑,特别是和巴罗的"微分三角形"有密切关系,莱布尼茨称它为"特征三角形". 巴罗的微分三角形对莱布尼茨有着重要启发,通过对微分三角形的研究,使他意识到求切线和求积问题是一对互逆的问题. 莱布尼茨是第一个表达出微分和积分之间互逆关系的科学家,他所创设的微积分符号远远优于牛顿的微积分符号,有效地促进了微积分学的发展. 牛顿发现微积分(1665—1666)比莱布尼茨至少早了 9 年,然而莱布尼茨公开发表他的微积分文章却比牛顿早 3 年. 莱布尼茨的许多研究成果和思想的发展,都包含在从 1673 年起写的但从未发表过的数百页的笔记中. 1673 年左右,他看到求曲线的切线的正问题和反问题的重要性,他完全相信反方法等价于通过求和来求面积和体积. 1684 年,莱布尼茨发表第一篇微分学论文《一种求极大值、极小值和切线的新方法》,对他以往的研究作了初步整理,叙述了微分学的基本原理,认为函数的无限小增量是自变量无限小变化的结果,并把这个函数的增量叫做微分,用字母 d 表示. 1675 年至 1676 年间,他从求曲边形面积出发得到积分的概念,给出微积分基本公式,即现在的牛顿-莱布尼茨公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$. 1686 年莱布尼茨发表积分学论文《探奥几何与不可分量及无限的分析》. 1693 年,他给出了上述定理的一个证明. 以上这些将微分和积分统一起来的论文及其定理证明,是微积分理论得以建立的一个重要标志.

专用模块

常微分方程与级数

CHAPTER 6 第六章

常微分方程

寻找变量之间的函数关系是实际问题中的重要课题之一.我们已经在此之前简单地介绍过求函数关系的一些方法,本章将进一步研究这个问题.

第一节 微分方程的概念

在许多领域里,常会遇到这样的问题:某个函数是怎样的并不知道,但根据该领域的普遍规律,却可以知道这个未知函数及其导数(或微分)与自变量之间会满足某种关系.下面我们先来看两个例子.

例 1 已知一条曲线过点(1, 2),且在该曲线上任意点 $P(x, y)$处的切线斜率为 $2x$,求这条曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=y(x)$,我们根据导数的几何意义,可知 $y=y(x)$ 应满足方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x. \tag{6-1}$$

我们发现这个方程中含有未知函数 y 的导数.

此外,未知函数 $y=y(x)$ 还应满足下列条件:

$$x=1 \text{ 时}, y=2, \text{简记为 } y\Big|_{x=1}=2.$$

把式(6-1)两端积分,得

$$y=\int 2x\,\mathrm{d}x, \text{即 } y=x^2+C, \tag{6-2}$$

其中 C 是任意常数. 把条件 $x=1$ 时, $y=2$ 代入式(6-2), 得 $C=1$, 把 $C=1$ 代入式(6-2), 得所求曲线方程为

$$y=x^2+1. \tag{6-3}$$

例 2 列车在平直线路上以 20 m/s 的速度行驶, 制动时列车获得加速度 $-0.4\ \mathrm{m/s^2}$, 问开始制动后多长时间列车才能停止, 以及列车在这段时间里行驶了多少路程?

解 设列车在开始制动后 t 秒行驶了 s(m), 根据题意, 反映制动阶段列车运动规律的函数 $s=s(t)$ 应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=-0.4. \tag{6-4}$$

此外, 未知函数 $s=s(t)$ 还应满足下列条件:

$$t=0 \text{ 时}, s=0, v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=20.$$

把式(6-4)两端积分, 得

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-0.4t+C_1, \tag{6-5}$$

再积分一次, 得

$$s=-0.2t^2+C_1 t+C_2, \tag{6-6}$$

这里, C_1, C_2 都是任意常数.

把条件 $v\Big|_{t=0}=20$ 代入式(6-5), 得 $C_1=20$.

把条件 $s\Big|_{t=0}=0$ 代入式(6-6), 得 $C_2=0$.

把 C_1, C_2 的值代入式(6-5)及(6-6), 得

$$v=-0.4t+20, \tag{6-7}$$

$$s=-0.2t^2+20t. \tag{6-8}$$

在式(6-7)中令 $v=0$, 得到列车从开始制动到完全停住所需的时间为

$$t=\frac{20}{0.4}=50(\mathrm{s}).$$

再把 $t=50$ 代入式(6-8), 得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s=-0.2\times 50^2+20\times 50=500(\mathrm{m}).$$

方程(6-1)和(6-4)都是含有未知函数的导数式,一般地,我们把含有未知函数的导数(或微分)的方程称为微分方程.微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶.例如方程(6-1)是一阶微分方程,方程(6-4)是二阶微分方程.

未知函数是一元函数的微分方程,叫做常微分方程.未知函数是多元函数的微分方程,叫做偏微分方程.这里我们只研究常微分方程.

从微分方程中求出未知函数是什么的过程就叫做解微分方程.满足微分方程的函数(它要在某区间上连续)称为微分方程的解,例如函数(6-2)和(6-3)都是微分方程(6-1)的解,函数(6-6)和(6-8)都是微分方程(6-4)的解.

微分方程的解有两种不同的形式,一种是解中含有任意常数且任意常数的个数与微分方程的阶数相同,这样的解称为微分方程的通解,另一种是解中不含有任意常数,这样的解称为微分方程的特解.通常,微分方程的通解里,含有一些任意常数,其个数与微分方程的阶数相同,因此用来确定任意常数以从通解得出一个特解所需的附加条件的个数也与微分方程的阶数相同.

确定微分方程通解中的任意常数的值的条件称为初始条件.

例 3 已知函数 $x=C_1\cos 5t+C_2\sin 5t$ 是微分方程$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+25t=0$ 的通解,求满足初始条件 $x\Big|_{t=0}=3, x'\Big|_{t=0}=0$ 的特解.

解 由条件 $x\,|_{t=0}=3$ 及 $x=C_1\cos 5t+C_2\sin 5t$ 得

$$C_1=3;$$

再由条件 $x'\Big|_{t=0}=0$ 及 $x'(t)=-5C_1\sin 5t+5C_2\cos 5t$ 得

$$C_2=0;$$

把 C_1, C_2 的值代入 $x=C_1\cos 5t+C_2\sin 5t$ 中,得

$$x=3\cos 5t.$$

课堂练习 6.1

习题 6.1

A

1. 判定下列式子哪些是微分方程,若是,请指明是几阶微分方程.

(1) $x^2y'+xy''$;

(2) $x^2+y^2=1$;

(3) $xy^3+x^2(y')^4+2x=0$;

(4) $y'''+x^3\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}+x^2=0$;

(5) $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$.

2. 判定下列函数是否为所给微分方程的解，若是，请指明是通解还是特解.

(1) $xy'-2y=0$, $y=Cx^2$；　　(2) $y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0$, $y=\dfrac{1}{x}$；

(3) $xy'=x$, $y=\dfrac{1}{2}x+C$；

3. 验证函数 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^x$ (C_1, C_2 为任意常数) 是微分方程 $y''+2y'=\mathrm{e}^x$ 的通解，并求满足初始条件 $y\big|_{x=0}=0$, $y'\big|_{x=0}=1$ 下的特解.

B

1. 指出微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2y=0$ 的阶数.

2. 验证下列函数是否为微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\omega y=0$ 的解，并指出哪一个是方程的通解.

(1) $y=\cos\omega x$；

(2) $y=C\sin\omega x$ (C 为任意常数)；

(3) $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$ (C_1, C_2 为任意常数).

3. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+25y=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$, $y'(0)=1$ 的特解.

习题 6.1
参考答案

第二节 一阶微分方程

本节介绍某些特殊类型的一阶微分方程的解法，包括可分离变量的一阶微分方程和一阶线性微分方程.

一、可分离变量的一阶微分方程

形如

$$y'=f(x)g(y)$$

或

$$f_1(x)g_1(y)\mathrm{d}x+f_2(x)g_2(y)\mathrm{d}y=0 \tag{6-9}$$

的微分方程称为可分离变量的一阶微分方程.此方程两端同时除以 $f_2(x)g_1(y)$ 后移项再积分,便成为

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\mathrm{d}x=-\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\mathrm{d}y.$$

这一结果就是方程(6-9)的通解.

例 1 求方程 $y'=2xy$ 的通解.

解 这是一个可分离变量的微分方程,分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\,\mathrm{d}x,$$

两端分别积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\,\mathrm{d}x,$$

有

$$\ln|y|=x^2+C_1,$$

从而

$$y=\pm\mathrm{e}^{x^2+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{x^2},$$

因为 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 仍是任意常数,把它记作 C,便得方程的通解

$$y=C\mathrm{e}^{x^2}.$$

例 2 求方程 $y'\cos x=y$ 满足初始条件 $y\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解.

解 分离变量,得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{\cos x},$$

两端分别积分,得

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

(分析:

$$\ln|y|=\ln|\sec x+\tan x|+\ln C',$$

$$y=\pm C'(\sec x+\tan x),$$

$\ln C'$有任意性,但 $C'>0$,而 $C=\pm C'$ 又有任意性,则 $y=C(\sec x+\tan x)$ 是通解.)

以后为了运算方便起见,可把 $\ln|y|$ 直接写成 $\ln y$,只要记住最后得到的任意常数 C 可正可负即可,得

$$\ln y=\ln|\sec x+\tan x|+\ln C,$$

于是通解为 $$y=C(\sec x+\tan x).$$

由初始条件 $y\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$ 求出 $$C=\frac{1}{2},$$

最后得到所求特解为

$$y=\frac{1}{2}(\sec x+\tan x).$$

二、一阶线性微分方程

形如

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{6-10}$$

的方程称为**一阶线性微分方程**. 当 $q(x)=0$ 时方程

$$y'+p(x)y=0 \tag{6-11}$$

称为**一阶齐次线性微分方程**；当 $q(x)\neq 0$ 时方程(6-10)称为**一阶非齐次线性微分方程**.

1. 一阶齐次线性微分方程的通解

我们注意到方程(6-11)是可分离变量的微分方程，分离变量后两边积分，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x,$$

$$\ln y=-\int p(x)\mathrm{d}x+\ln C,$$

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}. \tag{6-12}$$

这就是一阶齐次线性微分方程(6-11)的通解.

例 3 求 $y'+\dfrac{y}{x+1}=0$ 的通解.

解 将此方程分离变量后两边积分，得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x,$$

$$\ln y=-\ln(x+1)+\ln C,$$

因此该方程的通解为 $$y=\frac{C}{x+1}.$$

2. 一阶非齐次线性微分方程的通解

已经求出齐次线性微分方程(6－11)的通解为(6－12)，其中 C 为常数. 现在设想，如果方程(6－12)中的 C 不是常数，而是 x 的函数，设为 $C(x)$，那么能否选取适当的函数 $C(x)$，使

$$y=C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{6-13}$$

满足非齐次线性微分方程(6－10)呢？不妨试算一下. 先计算式(6－13)的导数

$$\begin{aligned} y' &= C'(x)e^{-\int p(x)dx}+C(x)e^{-\int p(x)dx}[-p(x)] \\ &= C'(x)e^{-\int p(x)dx}-p(x)y. \end{aligned} \tag{6-14}$$

把式(6－13)和(6－14)代入方程(6－10)，经计算可得

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx}=q(x).$$

可见，$C(x)$应选为

$$C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

于是非齐次线性微分方程(6－10)的通解为

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right], \tag{6-15}$$

其中 C 是任意常数.

回顾一下上面的做法，将相应的齐次线性微分方程的通解中的常数 C 变为待定函数 $C(x)$，然后代入非齐次线性微分方程，求出 $C(x)$，这样的方法叫常数变易法.

例 4 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-2xy=e^{x^2}\cos x$ 的通解.

解法 1 原方程对应的齐次方程为

$$\frac{dy}{dx}-2xy=0,$$

分离变量，得 $$\frac{dy}{y}=2x\,dx,$$

两边积分，得 $$\ln y=x^2+\ln C,$$

故对应齐次线性微分方程的通解为 $$y=Ce^{x^2}.$$

设原方程有通解 $y=C(x)e^{x^2}$，代入原方程，得

$$C'(x)\mathrm{e}^{x^2}=\mathrm{e}^{x^2}\cos x\text{，即 }C'(x)=\cos x\text{，}$$

所以
$$C(x)=\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C\text{，}$$

故原方程的通解为
$$y=\mathrm{e}^{x^2}(\sin x+C).$$

课堂思考 6.1

解法 2 所解方程与方程(6-10)对照，$p(x)=-2x$，$q(x)=\mathrm{e}^{x^2}\cos x$. 代入式(6-15)得所求方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{x^2}(\sin x+C).$$

例 5 求微分方程 $y'=\dfrac{y}{y+x}$ 的通解.

解 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{x}{y}=1.$$

它所对应的齐次方程为
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{x}{y}=0\text{，}$$

可求得其通解为
$$x=Cy.$$

设 $x=C(y)y$ 为方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\dfrac{x}{y}=1$ 的通解，代入原方程，化简得

$$C'(y)y=1\text{，}$$

从而有

$$C(y)=\ln y-\ln C\text{，即 }y=C\mathrm{e}^{C(y)}\text{，}$$

故原方程的通解为
$$y=C\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}.$$

习题 6.2

A

1\. 用变量分离法解下列方程.

(1) $2xy'-y\ln y=0$；

(2) $3x^2+8x-5y'=0$；

(3) $\sqrt{4-9x^2}\,y'=\sqrt{1-y^2}$；

(4) $\sec^2 x\tan y\,\mathrm{d}x+\sec^2 y\tan x\,\mathrm{d}y=0$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10^{x+y}$；

(6) $(y+1)^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^3=0$.

2. 解下列一阶非齐次线性微分方程.

(1) $y' + 2xy = 4x$；　　(2) $y' - \frac{1}{x}y = 2x^2$.

B

1. 用变量分离法解方程 $dy = x(2y dx - x dy)$.
2. 求方程 $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ 的通解.

习题 6.2
参考答案

第三节 高阶特殊类型微分方程

二阶及二阶以上的微分方程统称为高阶微分方程. 本节讨论几类特殊类型的高阶微分方程.

求解高阶微分方程的方法之一是设法降低方程的阶数. 下面我们以二阶方程为例来学习三种特殊的可以降阶的方程.

一、$y'' = f(x)$ 型的微分方程

对于这类方程，只需两端分别积分一次就可化为一阶方程

$$y' = \int f(x)dx + C_1,$$

再次积分，即可求出方程的通解

$$y = \int\left[\int f(x)dx\right]dx + C_1x + C_2.$$

这种方法也适用于如下形式的高阶微分方程

$$y^{(n)} = f(x).$$

例 1　求方程 $y'' = \cos x$ 的通解.

解　一次积分得

$$y' = \int \cos x\, dx = \sin x + C_1,$$

二次积分即得到方程得通解

$$y=-\cos x+C_1x+C_2.$$

二、$y''=f(x, y')$型的微分方程

为了把方程降阶，可令 $y'=p$，将 p 看作是新的未知函数，x 仍是自变量，于是

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=y'',$$

代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x, p),$$

这就是一个一阶方程，然后可由我们前面学的方法进行求解.

例 2 求方程 $y''=\frac{1}{x}y'$ 的通解.

解 令 $y'=p$，则 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=y''$，代入方程得

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}p,$$

分离变量后，得
$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分，得

$$p=C_1x,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1x,$$

再积分，即得原方程的通解

$$y=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2.$$

三、$y''=f(y, y')$型的微分方程

为了把方程降阶，可令 $y'=p$，将 p 看作是自变量 y 的函数，有

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

代入原方程,得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p).$$

这是一个关于 p 的一阶微分方程,可由此解出通解,然后再代入原方程求解.

例 3 求方程 $y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=0$ 的通解.

解 令 $y'=p$, $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,代入原方程得

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=0,$$

$$p\left(y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p\right)=0,$$

它相当于两个方程

$$p=0,\quad y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p=0,$$

由第一个方程解得 $y=C$;

第二个方程可用分离变量法解得 $p=C_1y$,

从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C_1y$,

由此再分离变量,解得 $y=C_2\mathrm{e}^{C_1x}$.

课堂练习 6.2

这就是原方程的通解(解 $y=C$ 包含在这个解中).

习题 6.3

A

求下列微分方程的通解.

(1) $(1+\mathrm{e}^{-x})y''+y'=0$;

(2) $y''-y'=x$;

(3) $xy''+y'=x$;

(4) $xy''-y'=x^2\mathrm{e}^x$;

(5) $y''-\frac{2y}{1+y^2}(y')^2=0$.

B

求下列微分方程的通解.

(1) $(1+x^2)y''-2xy'=0$;

(2) $2yy''-(y')^2=1$.

习题 6.3
参考答案

第四节 二阶常系数齐次线性微分方程

形如

$$y''+py'+qy=0 \tag{6-16}$$

的微分方程,当 p, q 是常数时,称为二阶常系数齐次线性微分方程.

可以猜想方程(6-16)具有 $y=e^{rx}$(r 是常数)形式的解.将 $y'=re^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$,代入方程(6-16)得

$$e^{rx}(r^2+pr+q)=0.$$

由于 $e^{rx}\neq 0$,所以有

$$r^2+pr+q=0. \tag{6-17}$$

由此可见,只要 r 满足代数方程(6-17),函数 $y=e^{rx}$ 就是微分方程(6-16)的解.我们把代数方程(6-17)叫做微分方程(6-16)的特征方程,特征方程的根称为微分方程的特征根.由于特征方程是一元二次方程,故其特征根有三种不同的情况,相应地可得微分方程(6-16)的三种不同形式的通解.

1. 当 $p^2-4q>0$ 时,特征方程(6-17)有两个不相等的实根 r_1 和 r_2,即

$$r_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},\ r_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

于是可得方程(6-16)的两个特解

$$y_1=e^{r_1x},\ y_2=e^{r_2x}.$$

$\dfrac{y_2}{y_1}=e^{(r_2-r_1)x}\neq$ 常数,即 y_1 与 y_2 线性无关,则常数 C_1 与 C_2 相互独立.故方程(6-16)

的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

2. 当 $p^2-4q=0$ 时，特征方程(6-17)有两个相等的实根 r_1 和 r_2，即

$$r=r_1=r_2=-\frac{p}{2},$$

此时得微分方程(6-16)的一个特解

$$y_1=\mathrm{e}^{rx}.$$

此时可用常数变易法求得微分方程(6-16)的另一个特解

$$y_2=x\mathrm{e}^{rx},$$

且 $\frac{y_2}{y_1}=x\neq$ 常数，即 y_1 与 y_2 线性无关，故方程(6-16)的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{rx}+C_2x\mathrm{e}^{rx},$$

即

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}.$$

3. 当 $p^2-4q<0$ 时，特征方程(6-17)有一对共轭复根 r_1 和 r_2，即

$$r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta,\ r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta,$$

于是可得方程(6-16)的两个特解

$$y_1=\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2=\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

且 $\frac{y_2}{y_1}=\tan\beta x\neq$ 常数，即 y_1 与 y_2 线性无关，故方程(6-16)的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

综上所述，求二阶常系数齐次线性微分方程(6-16)的通解的步骤可归纳如下：

第一步：写出微分方程(6-16)的特征方程(6-17)；

第二步：求出特征方程(6-17)的特征根 r_1 和 r_2；

第三步：根据特征根的不同情形，按照表 6-1 得到微分方程(6-16)的通解.

表 6-1

特征根	通解形式
两个不等实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
两个相等实根 $r_1=r_2=r$	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}$
一对共轭复根 $r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$，$r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$	$y=(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\mathrm{e}^{\alpha x}$

例 1 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解 该方程的特征方程为

$$r^2-2r-3=0,$$

其特征根为 $$r_1=-1,\ r_2=3,$$

故方程的通解为 $$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

例 2 求微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解.

解 该方程的特征方程为

$$r^2-4r+4=0,$$

其特征根为 $$r_1=r_2=2,$$

故方程的通解为 $$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2x\mathrm{e}^{2x}.$$

例 3 求微分方程 $y''+4y'+13y=0$ 的通解.

解 该方程的特征方程为

$$r^2+4r+13=0,$$

它有一对共轭复根 $$r=-2\pm 3\mathrm{i},$$

故方程的通解为 $$y=(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

例 4 求微分方程

$$y''-y'-2y=0$$

满足初始条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=3$ 的特解.

解 该方程的特征方程为

$$r^2-r-2=0,$$

其特征根为 $$r_1=2,\ r_2=-1,$$

故方程的通解为 $$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-x},$$

于是 $$y'=2C_1\mathrm{e}^{2x}-C_2\mathrm{e}^{-x}.$$

把初始条件代入上面两式，得关于 C_1，C_2 的方程组

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\ 2C_1-C_2=3,\end{cases}$$

求得 $$C_1=1,\ C_2=-1,$$

故满足初始条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=3$ 的特解是

$$y=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}.$$

习题 6.4

A

1. 求下列微分方程的通解.

(1) $y''+3y'-4y=0$; (2) $y''-2y'+y=0$;

(3) $2y''+2y'+3y=0$.

2. 求微分方程 $y''-2y'+2y=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1$, $y'\big|_{x=0}=0$ 的特解.

B

1. 求微分方程 $y^{(4)}-2y'''+5y''=0$ 的通解.

2. 已知一个二阶常系数线性齐次微分方程有一个解是 $y=\mathrm{e}^{-5x}$, 其特征方程的判别式为零,求此微分方程的通解,并求出其满足初始条件 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 的特解.

习题 6.4
参考答案

第五节 二阶常系数非齐次线性微分方程

形如

$$y''+py'+qy=f(x) \tag{6-18}$$

的微分方程,p, q 是常数,当 $f(x)\neq 0$ 时,称为**二阶常系数非齐次线性微分方程.**

求二阶常系数非齐次线性微分方程(5-1)的通解,可按以下三个步骤进行:

(1) 求其对应的齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 Y.

(2) 求非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解 y^*.

(3) 原方程的通解为 $y=Y+y^*$.

求齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 Y 的方法前面已讨论过,所以只要研究一下如何求非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解 y^* 即可.显然这里特解 y^* 与方程右端 $f(x)$的函数类型有关,我们讨论 $f(x)$为以下两种形式的情形.

1. $f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$ 型

其中 λ 是已知常数,$P_m(x)$是已知的 m 次多项式

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m.$$

因为方程(6－18)右端 $f(x)$是多项式 $P_m(x)$与指数函数 $e^{\lambda x}$ 的乘积，而多项式与指数函数乘积的导数仍然是同一类型的函数，故可设方程(6－18)的特解为

$$y^* = Q(x)e^{\lambda x},$$

其中 $Q(x)$是 x 的待定多项式. 对 y^* 求导，得

$$y^{*\prime} = e^{\lambda x}[\lambda Q(x) + Q'(x)],$$
$$y^{*\prime\prime} = e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)],$$

将 y^*，$y^{*\prime}$ 及 $y^{*\prime\prime}$代入方程(6－18)，并消去 $e^{\lambda x}$，得

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x). \tag{6-19}$$

λ 可能出现的情况分为以下三种.

(1) 如果 λ 不是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的特征根，由于 $P_m(x)$是一个 m 次多项式，要使式(6－19)的两端恒等，可令 $Q(x)$为另一个 m 次多项式 $Q_m(x)$，即设 $Q_m(x)$为

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m,$$

其中 b_0，b_1，…，b_m 为待定系数，于是在此情况下方程(6－18)的特解可设为

$$y^* = Q_m(x)e^{\lambda x}.$$

(2) 如果 λ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的单根，即 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$，但 $2\lambda + p \neq 0$，要使式(6－19)的两端恒等，$Q'(x)$必须是 m 次多项式，此时可令

$$Q(x) = xQ_m(x).$$

于是在此情况下方程(6－18)的特解可设为

$$y^* = xQ_m(x)e^{\lambda x}.$$

(3) 如果 λ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的重根，即 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 且 $2\lambda + p = 0$，要使式(6－19)的两端恒等，$Q''(x)$必须是 m 次多项式，此时可令

$$Q(x) = x^2 Q_m(x).$$

于是在此情况下方程(6－18)的特解可设为

$$y^* = x^2 Q_m(x)e^{\lambda x}.$$

综上所述，有以下结论：

二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = P_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解可设为

$$y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x},$$

其中 $Q_m(x)$是与 $P_m(x)$同次的待定多项式，而 k 按 λ“不是特征方程的根”“是特征方程

的单根”“是特征方程的重根”,依次取为 0,1,2.

例 1 求方程 $y''+y=2x^2-3$ 的一个特解.

解 这个方程实为 $y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$,当 $\lambda=0$, $p=0$, $q=1$, $P_m(x)=2x^2-3$ 时的情形.

$\lambda=0$ 不是特征方程 $r^2+1=0$ 的根,而 $P_m(x)=2x^2-3$ 是 x 的二次多项式,故原方程的特解为

$$y^*=Ax^2+Bx+C,$$

则 $$y^{*\prime}=2Ax+B,\ y^{*\prime\prime}=2A,$$

将它们代入原方程得 $$2A+Ax^2+Bx+C=2x^2-3,$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数可得

$$A=2,\ B=0,\ C=-7,$$

故所求方程的一个特解为 $$y^*=2x^2-7.$$

例 2 求方程 $y''-4y'+4y=2xe^{2x}$ 的通解.

解 所求方程是二阶常系数非齐次线性微分方程,且右端函数形如 $P_m(x)e^{\lambda x}$,其中 $\lambda=2$, $P_m(x)=2x$,对应的齐次方程为

$$y''-4y'+4y=0,$$

其特征方程为 $$r^2-4r+4=0,$$

于是齐次方程的通解为 $$Y=(C_1+C_2x)e^{2x}.$$

由于 $r=2$ 是二重特征根,故原方程的特解为

$$y^*=x^2(Ax+B)e^{2x}.$$

将它们代入原方程得

$$6Ax+2B=2x,$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数可得

$$A=\frac{1}{3},\ B=0,$$

于是所求方程的一个特解为 $$y^*=\frac{1}{3}x^3e^{2x}.$$

最后得所求方程的通解为

$$y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{3}x^3\right)e^{2x}.$$

2. $f(x)=e^{\lambda x}[A\cos\omega x+B\sin\omega x]$ 型

其中 λ, A, B, ω 均为已知常数. 与上面类型的讨论类似,方程(6-18)的特解可设为

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x],$$

其中 C_1, C_2 为待定系数,而按 $\lambda\pm i\omega$ "不是特征方程的根"或"是特征方程的单根",依次取 0 或 1.

例 3 求方程 $y''+3y'-y=e^x\cos 2x$ 的一个特解.

解 方程的 $\lambda=1, \omega=2$, 方程对应的齐次方程为

$$y''+3y'-y=0,$$

特征方程为

$$r^2+3r-1=0.$$

故 $\lambda+i\omega=1+2i$ 不是特征根,所以设特解为

$$y^*=e^x[A\cos 2x+B\sin 2x],$$

$$y^{*\prime}=e^x[(A+2B)\cos 2x+(B-2A)\sin 2x],$$

$$y^{*\prime\prime}=e^x[(4B-3A)\cos 2x+(-4A-3B)\sin 2x],$$

将它们代入原方程得

$$(10B-A)\cos 2x-(B+10A)\sin 2x=\cos 2x,$$

比较上式两端 $\cos 2x$ 与 $\sin 2x$ 的系数可得

$$\begin{cases}10B-A=1,\\ B+10A=0,\end{cases}$$

解此方程组,得

$$A=-\frac{1}{101},\ B=\frac{10}{101}.$$

故所求特解为

$$y^*=e^x\left[\frac{-1}{101}\cos 2x+\frac{10}{101}\sin 2x\right].$$

例 4 求方程 $y''+y=\sin x$ 的一个特解.

解 方程的 $\lambda=0, \omega=1$, 方程对应的齐次方程为

$$y''+y=0,$$

特征方程为

$$r^2+1=0,$$

故 $\lambda+i\omega=i$ 是特征根,所以设特解为

$$y^*=x[A\cos x+B\sin x],$$

$$y^{*\prime}=A\cos x+B\sin x+x(B\cos x-A\sin x),$$

$$y^{*\prime\prime}=2B\cos x-2A\sin x-x(A\cos x+B\sin x),$$

将它们代入原方程得

$$-2A\sin x+2B\cos x=\sin x,$$

比较上式两端 $\cos x$ 与 $\sin x$ 的系数可得

$$A=-\frac{1}{2},\ B=0,$$

故所求特解为

$$y^{*}=-\frac{1}{2}x\cos x.$$

例 5 求方程 $y''+y'-2y=e^{x}(\cos x-7\sin x)$ 的通解.

解 所求方程对应的齐次方程为

$$y''+y'-2y=0,$$

课堂思考 6.2

特征方程为

$$r^{2}+r-2=0,$$

特征根为

$$r_{1}=1,\ r_{2}=-2,$$

于是齐次方程的通解为

$$Y=C_{1}e^{x}+C_{2}e^{-2x},$$

故 $\lambda\pm i\omega=1\pm i$ 不是特征根,故所求方程的特解为

$$\begin{aligned}y^{*}&=e^{x}[A\cos x+B\sin x],\\ y^{*\prime}&=e^{x}[(A+B)\cos x+(B-A)\sin x],\\ y^{*\prime\prime}&=e^{x}[2B\cos x-2A\sin x],\end{aligned}$$

将它们代入原方程得

$$(3B-A)\cos x-(B+3A)\sin x=\cos x-7\sin x,$$

比较上式两端 $\cos x$ 与 $\sin x$ 的系数可得

$$\begin{cases}3B-A=1,\\ -B-3A=-7,\end{cases}$$

解此方程组,得

$$A=2,\ B=1.$$

故所求方程的特解为

$$y^{*}=e^{x}(2\cos x+\sin x),$$

所以原方程的通解为

$$y=e^{x}(2\cos x+\sin x)+C_{1}e^{x}+C_{2}e^{-2x}.$$

习题 6.5

A

求下列微分方程的通解.

(1) $y''-3y'=-6x+2$；

(2) $y''+y=2x^2\mathrm{e}^x$；

(3) $y''-3y'+2y=3\mathrm{e}^{2x}$；

(4) $y''+y=\cos 2x$；

(5) $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x\sin 2x$.

B

求下列微分方程的通解.

(1) $y''-2y'-3y=(12x^2+2x)\mathrm{e}^{-x}$.

(2) $y''+y=x\cos 2x$.

习题 6.5
参考答案

第六节 微分方程的应用

微分方程的理论和解法都是应用数学的重要分支，它在工程、经济、物理等领域内都有非常重要的应用.

本节通过几个常见的微分方程的例子，介绍它在实际中的应用.

应用微分方程解决具体问题的步骤是：

(1) 分析问题，建立微分方程，并确定初始条件.

(2) 求出该微分方程的通解.

(3) 根据初始条件确定所求的特解.

例 1 已知曲线经过点$\left(2,\ \dfrac{4}{3}\right)$，并且曲线上任何一点的切线斜率与该点到原点连线的斜率之和等于切点处的横坐标，求此曲线的方程.

解 设曲线上任意一点坐标为 $M(x,\ y)$，那么曲线在点 M 处的切线斜率为 y'，点 M 与原点 O 的连线的斜率为$\dfrac{y}{x}$. 依题意有

$$y'+\frac{y}{x}=x.$$

又曲线过点$\left(2,\ \dfrac{4}{3}\right)$，故有初始条件 $y\big|_{x=2}=\dfrac{4}{3}$.

由一阶线性微分方程通解的公式得

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int x\,\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right],$$

即
$$y=\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+C\right),$$

由初始条件 $y\big|_{x=2}=\frac{4}{3}$，得 $C=0$.

故所求曲线方程为
$$y=\frac{1}{3}x^2.$$

例 2 一台电动机运转后，每秒温度升高 1℃，设室内温度为 15℃，电动机温度的冷却速度和电动机与室内温差成正比. 求电动机的温度与时间的函数关系.

解 设电动机运转经过时间 t(单位：s)后的温度(单位：℃)为 $T=T(t)$，当时间 t 增加 $\mathrm{d}t$ 时，电动机的温度也相应地从 $T(t)$ 增加到了 $T(t)+\mathrm{d}T$.

由于在 $\mathrm{d}t$ 时间内，电动机的温度升高了 $\mathrm{d}t$，同时受室温的影响又下降了 $k(T-15)\mathrm{d}t$. 因此在 $\mathrm{d}t$ 时间内温度的实际改变量为

$$\mathrm{d}T=\mathrm{d}t-k(T-15)\mathrm{d}t,$$

或写成

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}+kT=1+15k,$$

所以

$$\begin{aligned}T(t)&=\mathrm{e}^{-\int k\mathrm{d}t}\left[\int(1+15k)\mathrm{e}^{\int k\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right]+C\\&=\mathrm{e}^{-kt}\left[\frac{(1+15k)\mathrm{e}^{kt}}{k}+C\right],\end{aligned}$$

由题意可知，初始条件为 $T\big|_{t=0}=15$，所以 $C=-\frac{1}{k}$.

故经过时间 t 后，电动机的实际温度为

$$T(t)=15+\frac{1}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt}).$$

由上式可见，电动机开动较长时间后，温度将稳定于

$$T(t)=15+\frac{1}{k}.$$

由以上例题可知，建立微分方程的方法一般有两种：一是直接利用物理或几何条件等列出方程；二是取微元分析，然后再利用有关定律列出方程.

习题 6.6

A

1. 设曲线上一点的切线介于两坐标轴间的部分恰为切点所平分. 已知曲线经过点 $(2, 3)$，求此曲线的方程.
2. 已知细菌数量增长的速度与当前数量成正比. 1 小时后观察到有 1 000 个细菌；4 小时后有 300 个. 求：
   (1) 在任何时刻 t，细菌近似数量的表达式；
   (2) 最初有多少个细菌？

B

一质量为 m 的潜水艇从水面由静止状态开始下潜，所受阻力与下潜速度成正比，其比例系数 $k=0.5$，试求潜水艇下潜速度 $v(t)$ 与时间 t 的关系.

习题 6.6
参考答案

本 章 小 结

一、学习目标与要求

1. 了解微分方程、阶、初始条件、通解和特解的基本概念.

2. 会识别可分离变量的一阶微分方程、一阶线性微分方程. 熟练掌握可分离变量的一阶微分方程与一阶线性微分方程的解法.

3. 了解形如 $y^{(n)}=f(x)$，$y''=f(x, y')$ 及 $y''=f(y, y')$ 这三种特殊高阶常微分方程的解法.

4. 熟练掌握二阶线性常系数齐次微分方程的解法.

5. 了解非齐次微分方程的解法（选学内容）.

6. 了解微分方程的应用（选学内容）.

二、本章主要内容

1. 常微分方程的基本概念

(1) 微分方程

含有未知函数的导数（或微分）的方程称为微分方程. 微分方程中出现的未知函数的

最高阶导数(或微分)的阶数称为微分方程的阶.未知函数是一元函数的微分方程,叫做常微分方程.

(2) 微分方程的解

满足微分方程的函数称为微分方程的解.微分方程的解有两种不同的形式,一种是解中含有任意常数且任意常数的个数与微分方程的阶数相同,这样的解称为微分方程的通解;另一种是解中不含有任意常数,这样的解称为微分方程的特解.确定微分方程通解中的任意常数的值的条件称为初始条件.

2. 一阶常微分方程的解法

(1) 可分离变量的一阶微分方程

若微分方程经过适当变换,可表示成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y),$$

则称之为可分离变量的一阶微分方程.对上述方程,分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x,$$

就可得到包含一个任意常数的方程的通解.

(2) 一阶线性微分方程

形如

$$y'+p(x)y=q(x)$$

的方程称为一阶线性微分方程.当 $q(x)=0$ 时,上述方程称为一阶齐次线性微分方程;当 $q(x)\neq 0$ 时,上述方程称为一阶非齐次线性微分方程.

一阶齐次线性微分方程的求解可用可分离变量法,得通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x};$$

一阶非齐次线性微分方程的求解可用常数变易法,得通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

3. 特殊的高阶常微分方程

(1) $y^{(n)}=f(x)$,在方程两边依次进行 n 次积分,便得到含有 n 个任意常数的通解.

(2) $y''=f(x,y')$,可令 $y'=p$,将原方程化为以 p 为未知函数的一个方程

$$p'=f(x,p),$$

设其通解为 $p=\varphi(x,C_1)$，从而可得原方程通解

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

(3) $y''=f(y,y')$，可令 $y'=p$，将 p 看作是自变量 y 的函数，由于

$$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

于是将原方程化为以 p 为未知函数的一个方程

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p).$$

设其通解为 $p=\varphi(y,C_1)$，从而可得原方程通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

4. 二阶线性常系数微分方程

(1) 齐次微分方程

$$y''+py'+qy=0.$$

求二阶常系数齐次线性微分方程的通解步骤如下：

① 写出微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程 $r^2+pr+q=0$.

② 求出特征方程的特征根 r_1 和 r_2.

③ 根据特征根的不同情形（单根、重根、共轭复根），写出相应的微分方程的通解.

(2) 非齐次微分方程

$$y''+py'+qy=f(x).$$

求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解步骤如下：

① 求其对应的齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 Y.

② 求非齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的一个特解 y^*.

③ 原方程的通解为 $y=Y+y^*$.

5. 微分方程的应用

求解应用题时，首先需要列微分方程，这可根据有关科学知识，分析所研究的变量应该遵循的规律，找出各量之间的等量关系列出微分方程，然后根据微分方程的类型用相应的方程求解，还应注意，有的应用问题还含有初始条件.

综合复习题六

1. 填空题.

(1) 微分方程 $y'=e^{2x-y}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解为________.

(2) 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的通解为________.

(3) 微分方程 $y'-\dfrac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ 的通解为________.

(4) 设 $y_1=e^{2x}$，$y_2=e^{3x-4}$，$y_3=e^{2(x+1)}$，$y_4=e^{3x}-e^{2x}$ 是方程 $y''+py'+qy=0$ 的四个特解,方程通解的最简形式为________.

2. 选择题.

(1) 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2\cos x$ 的通解是(　　).

A. $y=-\sin x+C$　　B. $y=-\cos x+C$

C. $y=\dfrac{1}{\cos x+C}$　　D. $y=-\dfrac{1}{\sin x+C}$,还有解 $y=0$

(2) 微分方程 $xy'+(1+x)y=e^x$ 的通解是(　　).

A. $y=C\dfrac{e^{-x}}{x}$　　B. $y=\dfrac{e^x}{x}\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}+C\right)$

C. $y=\dfrac{e^{-x}}{x}\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}+C\right)$　　D. $y=\dfrac{e^{-x}}{x}(2e^{2x}+C)$

(3) 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=y\tan x+\sec x$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解是(　　).

A. $y=\dfrac{1}{\cos x}(C+x)$　　B. $y=\dfrac{x}{\cos x}$

C. $y=\dfrac{x}{\sin x}$　　D. $y=\dfrac{1}{\cos x}(2+x)$

(4) 微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=6$，$y'|_{x=0}=10$ 的特解是(　　).

A. $y=3e^x+e^{3x}$　　B. $y=2e^x+3e^{3x}$

C. $y=4e^x+2e^{3x}$　　D. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$

3. 解下列微分方程.

(1) $2y\,dx+x\,dy-xy\,dy=0$；

(2) $y'+y=\sin x$；

(3) $y''-5y'=0$；

(4) $y''-2y'+y=4\cos x$, $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=-1$.

4. 解下列微分方程.

(1) $y''=\dfrac{1}{1+x^2}$;　　(2) $y'''=2x+\sin x$.

5. 已知一艘汽艇在平静的水中以 5 m/s 的速度运动，这时关闭发动机，经过 20 s 后汽艇的速度降至 3 m/s，求发动机关闭 2 min 后汽艇的速度.

综合复习题六
参考答案

阅读材料六

微分方程的发展史

微分方程的起源可追溯到 17 世纪末，为了解决物理问题、天文学问题，微分方程几乎与微分、积分同时产生. 数学家曾借助于微分方程从理论上得到了行星运动规律，从而验证了德国天文学家开普勒由实验而得到的结论. 天文学家也曾借助于微分方程，在海王星被观测到之前，推算出它的方位. 而今微分方程已成为科学研究的强有力工具.

本章所讲的常微分方程，主要是介绍几类微分方程的初等积分解法，即限于微分方程历史的第一个时期：17 世纪的后 25 年至 18 世纪初所得到的求解微分方程的成果. 与 17 世纪后期与 18 世纪前期的微积分一样，常微分方程最早出现在数学家们彼此的通信中，或者出现在那些常常重登书信中建立或说明的结果的刊物中. 荷兰数学家、物理学家、天文学家惠更斯在 1693 年的《教师学报》中明确提出微分方程. 雅各布·伯努利是利用微积分求常微分方程问题分析解的先驱之一. 在 1690 年，在他发表的论文中就引入了微分方程.

雅各布·伯努利在 1695 年的学报中提出了伯努利方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=p(x)y+q(x)y^{(n)}$ 的问题征解. 莱布尼茨在 1696 年给出证明：利用变量替换 $z=y^{1-n}$，可以把方程化为关于未知函数及其导函数都是一次的线性方程.

二阶常微分方程于 1691 年在物理问题的研究中首次出现. 雅各布·伯努利研究船帆在风力下的形状，即膜盖问题时，引入二阶方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}=\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^3$，其中 s 为弧长. 在其 1691 年所著的微积分教科书中给出了这个问题的解答，证明了它与悬链线问题在数学上是相同的. 1734 年 12 月丹尼尔·伯努利在给欧拉的信中宣称，他解决了一端固定在墙上，而另一端自由的弹性横梁的横向位移问题：$k^4\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}=y$，其中 k 为常数，x 是横梁上距自由端的距离，y 是在 x 点的相对于横梁未弯曲位置的垂直位移.

1700 年约翰·伯努利用形如 x^{φ} 的因子可以逐次降低线性微分方程

$$a_0 x^n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} + a_1 x^{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_n y = 0$$

的阶数.1740 年欧拉用代换 $x = \mathrm{e}^t$ 的方法求得它的解,后来此方程被命名为欧拉方程.

1700 年以后,利用级数求解微分方程的方法广泛得到使用.1750 年,欧拉将这种方法提到重要的位置.1766 年,达朗倍尔指出,线性非齐次微分方程的通解等于它的特解与相应线性齐次微分方程的通解之和.

到 18 世纪中期,微分方程成为数学中的一门独立学科,而其求解问题成为该学科的一项重要内容.但对解的理解与寻求却不断发生本质上的变化.起初限于用初等函数表示解;以后它们允许用一个没有积出的积分表示解;后来在用前两种方法不断失败之后,又提出用无穷级数表示解.时至今日,微分方程仍然是最有生命力的数学分支之一,几乎渗透到了各个科学领域,并不断在向前发展.

第七章 CHAPTER 7
级　数

级数是高等数学的重要组成部分之一,它是进行函数研究和近似计算的重要工具,它在数学和工程技术中有着广泛的应用. 本章先介绍无穷级数的一些基本概念,然后讨论如何将函数展开成级数的问题.

第一节　无穷级数的概念与性质

一、无穷级数的基本概念

在生产实践和科学实验中,我们常会遇到无穷数列求和的问题,对于这类无穷多个数的求和问题,我们给出如下定义.

定义 7.1　设数列为 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$,则表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

称为常数项无穷级数,记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

其中 u_n 称为级数的第 n 项,也称为一般项或通项.

例如:

$1+2+3+\cdots+n+\cdots$;

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$;

$1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}n+\cdots$;

都是常数项级数.其中前两个级数为正项级数.

u_1, u_2, u_3, $\cdots$, u_n, $\cdots$也可以是函数数列.如果 $u_n=u_n(x)$ 是函数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 称为函数项级数,把 $x=x_0$ 代入,则函数项级数成为常数项级数.

例如:

$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$;

$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx+\cdots$;

都是函数项级数.

常数项级数和函数项级数统称为无穷级数,简称级数,在本节中,我们先讨论常数项级数.

二、常数项级数的收敛

无穷级数是无穷多个数累加的结果,这就无法如通常处理有限个数那样可以直接把它们逐项相加.我们可以先求有限项的和,然后再运用极限的方法来解决这个无穷多项的累加问题.

定义 7.2　对于无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,它的前 n 项之和

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$$

称为级数的部分和.

如果当 $n\to\infty$ 时,S_n 的极限存在且等于 S,即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是收敛的,并称 S 为该级数的和,即

$$S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

如果当 $n\to\infty$时,S_n 极限不存在,则称这个级数是发散的,发散的级数没有和.

显然,当级数收敛时,其部分和 S_n 是级数的和 S 的近似值,它们之间的差值

$$r_n=S-S_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$$

叫做级数的余项.用近似值 S_n 代替级数的和 S 所产生的误差是这个余项的绝对值,即误差是 $|r_n|$.

例 1 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

是否收敛？若收敛，求它的和 S.

解 该级数的一般项可变形为

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

所以，前 n 项的和为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，其和 $S=1$.

例 2 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 $$\begin{aligned}S_n&=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\\&=\ln(1+n),\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(1+n)=\infty,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

例 3 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 的敛散性.

解 当 $q\neq 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 前 n 项的和

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

当 $|q|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a}{1-q}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛.

当 $|q|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散.

当 $q=1$ 时，$S_n=na$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 发散.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 叫做等比级数.

三、级数收敛的必要条件

对于一个级数是否收敛，一般地，我们有如下定理.

定理 7.1　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，那么当 $n\to\infty$ 时其通项 u_n 的极限值为零，即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.（证明从略）

此定理只是级数收敛的必要条件，而不是充分条件. 也就是说，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 级数不一定收敛；但是如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定发散.

例如：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 当 $n\to\infty$ 时，通项 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=0$，但该级数在例 2 中我们已求得是发散的.

再如：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\dfrac{n+1}{n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\dfrac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=1\neq 0$，所以该级数发散.

四、级数的基本性质

性质 7.1　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛且它的和为 S，那么当 $c\neq 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也是收敛的，且它的和为 cS. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，那么当 $c\neq 0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也发散.

证明　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的部分和分别为 S_n 与 S_{n^*}，则

$$S_{n^*}=cu_1+cu_2+cu_3+\cdots+cu_n=cS_n,$$

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛且它的和为 S，则

$$\lim_{n\to\infty} S_{n^*} = \lim_{n\to\infty} cS_n = c\lim_{n\to\infty} S_n = cS,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛，其和为 cS.

由性质 1 可知，级数的每一项乘以同一个不为零的常数，其敛散性不变.

性质 7.2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，其和分别为 S_1 和 S_2，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $S_1 \pm S_2$.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 的部分和分别为 S_{n1}，S_{n2}，S_{n3}，则

$$\begin{aligned} S_{n3} &= \sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_3 \pm v_3) + \cdots + (u_n \pm v_n) \\ &= (u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n) \pm (v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n) = S_{n1} \pm S_{n2} \end{aligned}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} S_{n3} = \lim_{n\to\infty}(S_{n1} \pm S_{n2}) = S_1 \pm S_2.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛，其和为 $S_1 \pm S_2$.

我们把级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的和(差).

例 4 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^{n-1}}{3^n}$ 是否收敛？若收敛，求其和.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{3^n}$ 是公比 $q = \dfrac{1}{3}$ 的等比级数，它是收敛的，且其和为 1.

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}$ 是公比 $q = -\dfrac{1}{3}$ 的等比级数，它也是收敛的，且其和为 $\dfrac{1}{4}$.

所以，根据性质 2，可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3^n} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^n}\right)$ 收敛，其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

性质 7.3 收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

注： 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛. 例如级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots$$

收敛于零，但级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

却是发散的.

性质 7.4 在一个级数的开头添入或去掉有限项并不影响这个级数的收敛或发散.

注: 一个级数增加或减少有限项后,虽然其敛散性不变,但在一般情况下它的和是会改变的.

例如,$a=1$, $q=\frac{1}{2}$ 的等比级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$ 是收敛的,减去它的前五项得到级数 $\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$ 显然仍是收敛的,但前一个级数的和为 2,后一个级数的和为 $\frac{1}{16}$.

习题 7.1

A

1. 判别下列级数的敛散性,如果收敛,则求其和.

(1) $1+2+3+4+\cdots+n+\cdots$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2. 判别下列级数的敛散性.

(1) $\mathrm{e}-\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^4+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{e}^n+\cdots$;

(2) $1+\ln^2 3+\ln^3 3+\ln^4 3+\cdots$;

(3) $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$.

B

1. 判别下列级数的敛散性,如果收敛,则求其和.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$.

2. 判别下列级数的敛散性.

(1) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^{n}\frac{8^n}{9^n}+\cdots$;

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$.

习题 7.1
参考答案

第二节 正项级数及其审敛法

利用级数的定义和性质去判断一个级数的收敛情况，往往是很困难的，因此需要建立判断级数敛散情况的审敛法. 下面介绍几种正项级数的审敛法.

一、正项级数的定义

第一节所讲的都是一般的常数项级数. 级数中各项可以是正数、负数或者零. 现在我们讨论各项都是正数或零的级数，即正项级数. 这种级数特别重要，以后可以看到许多级数的敛散性问题会归结为正项级数的敛散性问题.

定义 7.3 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的每一项都是非负数，即 $u_n \geqslant 0(n=1,2,3,\cdots)$，则称该级数为正项级数.

二、正项级数的审敛法

设正项级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

的部分和为 S_n. 由第一节所学知，若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，正项级数收敛；若极限不存在，正项级数发散.

下面给出正项级数的审敛方法.

1. 正项级数的比较审敛法

定理 7.2 设两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，且 $(u_n \leqslant v_n)(n=1,2,3,\cdots)$. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散(证明从略).

例 1 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n+1}$ 的敛散性.

解
$$\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)},$$

因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$（第一节例 1）收敛，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+1}$ 也收敛.

例 2　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是否收敛?

解　由第一节例 2 知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 是发散的，

而　$\ln(1+x)<x(x>0)$　$\left(令\ y=\ln(1+x)-x;\ \ y'=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}<0\right)$，

则
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

我们称这个级数为调和级数.

例 3　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解
$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2-1},$$

因级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ 收敛（习题 7.1 中 B 类第 1 题的(1)），所以由比较审敛法可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

例 4　判别 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>0)$ 敛散性.

解　当 $p\leqslant 1$ 时，因
$$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots),$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以由比较审敛法可知，这时 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

当 $p>1$ 时，p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛（推证从略）.

2. 正项级数的比值审敛法（达朗贝尔判别法）

定理 7.3　如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，满足条件：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则：

当 $\rho<1$ 时，级数收敛；

当 $\rho>1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty$ 时，级数发散；

当 $\rho=1$ 时，级数可能收敛也可能发散.

定理 7.3 证明从略.

例 5 判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}(a>0)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$.

解 (1) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2>1,$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$ 发散.

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=0<1,$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}(a>0)$ 收敛.

(3) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)^5}}{\dfrac{5^n}{n^5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^5}=5>1,$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$ 发散.

习题 7.2

A

1. 用比较审敛法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}$.

2. 用比值审敛法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^n}$.

B

1. 用比较审敛法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}(a>0)$；

(3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$.

2. 用比值审敛法判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n2^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{2^n}$.

习题 7.2
参考答案

第三节　幂级数

前面我们研究的级数都是常数项级数，在自然科学与工程技术中运用级数处理实际问题时，经常用到的级数是函数项级数. 从这一节开始，我们将介绍函数项级数.

一、函数项级数的概念

设函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, …, $f_n(x)$, …,其中每一个函数都在同一个区间 I 上有定义,那么表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

称为定义在 I 上的函数项级数.

显然,当上面级数中的变量 x 取定了某一个值 x_0 时,它就变为一个常数项级数:

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \cdots.$$

如果此级数收敛,则称 x_0 是函数项级数的一个收敛点,否则称 x_0 为发散点. 函数项级数的收敛点的全体称为函数项级数的收敛域. 对于收敛域上每一个 x,都有级数的一个和数 S. 于是可知 S 是 x 的函数,记作 $S(x)$,并称 $S(x)$为函数项级数的和函数,即

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad 或 \qquad S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

其中

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x)$$

称为部分和函数,x 在收敛域内.

例如,函数项级数

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}(-1 < x < 1),$$

区间$(-1, 1)$为级数收敛域,和函数为 $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

在函数项级数中,最重要的一类级数就是幂级数,它在工程技术研究与近似计算中有着广泛的应用.

二、幂级数及其收敛域

形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \tag{7-1}$$

形式的函数项级数,称为幂级数.其中 x_0 及 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 均为常数,$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 称为幂级数的系数.当 $x_0=0$ 时,幂级数表示为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots. \qquad (7-2)$$

我们着重研究幂级数(7-2)的收敛域的问题,至于幂级数(7-1)的收敛域的问题,只需要作变换 $t=x-x_0$,将幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)$ 转变为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 即可讨论其收敛问题.

1. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ 的收敛

与常数项级数一样,我们把 $S_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 称为幂级数的部分和.如果部分和当 $n\to\infty$ 时,对区间 I 中的每一点都收敛,那么称级数在区间 I 内收敛.此时,S_n 的极限是定义在区间 I 中的函数,记作 $S(x)$.这个函数 $S(x)$ 称为级数的和函数,简称和,记作

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

对于幂级数,我们关心的问题仍是它的收敛与发散的判定问题,下面我们来学习关于幂级数收敛的判定定理.

2. 幂级数的审敛定理

定理 7.4 设幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho,$$

那么,当 $|x|<\frac{1}{\rho}$ 时,幂级数收敛;当 $|x|>\frac{1}{\rho}$ 时,幂级数发散;当 $\rho=0$ 时,级数在 $|x|<+\infty$ 时收敛;当 $\rho=+\infty$ 时,级数仅在点 $x=0$ 处收敛.

由上面的定理我们可知:幂级数的收敛区间是关于原点对称的区间 $|x|<\frac{1}{\rho}$ 在这个区间内级数收敛,在这个区间外级数发散.区间 $|x|<\frac{1}{\rho}$ 称为幂级数的收敛区间.正数 $\frac{1}{\rho}$ 或 $+\infty$ 为幂级数的收敛半径,记作 R.

因此，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

讨论幂级数收敛的问题主要在于收敛半径的寻求.

当 $|x|=\dfrac{1}{\rho}=R$ 时，级数的敛散性不能由定理来判定，需另行讨论.

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间的步骤是：

(1) 首先求出收敛半径 R.

(2) 判断 $x=\pm R$ 时级数的敛散性.

(3) 最后写出收敛区间.

例 1 求幂级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

的收敛区间.

解 因为 $a_n=\dfrac{1}{n!}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

故收敛半径 $R=+\infty$. 所以此幂级数的收敛区间是$(-\infty,+\infty)$.

例 2 求幂级数

$$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n+\cdots$$

的收敛区间.

解 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n+1}}{(-1)^n\dfrac{1}{n}}\right|=1,$$

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$.

对于端点 $x=-1$，级数成为

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{n}-\cdots,$$

此时级数发散；

对于端点 $x=1$，级数成为

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 是收敛的(此结论推导从略，对交错级数有兴趣的读者可以自学).

因此，幂级数的收敛区间是$(-1,1]$.

例 3 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{(x-1)^{n}}{2^{n}}$ 的收敛区间.

解 令 $t=x-1$，上述级数变为

$$\sum_{t=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{t^{n}}{2^{n}}.$$

因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n}}{2^{n}}}\right|=\frac{1}{2},$$

所以收敛半径 $R=2$.

当 $t=2$ 时，级数成为

$$-1+1-1+\cdots+(-1)^{n}+\cdots,$$

此时级数发散；

当 $t=-2$ 时，级数成为

$$1+1+1+\cdots+1+\cdots,$$

此时级数也发散. 因此级数 $\sum\limits_{t=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{t^{n}}{2^{n}}$ 的收敛区间是 $-2<t<2$，即 $-2<x-1<2$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{(x-1)^{n}}{2^{n}}$ 的收敛区间是$(-1,3)$.

三、幂级数的运算

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2，它们的和函数分别为 $S_1(x)$，$S_2(x)$，记作 $R=\min\{R_1, R_2\}$. 那么幂级数可以进行下列运算.

1. 加法和减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = S_1(x) + S_2(x),\ x \in (-R, R).$$

2. 乘法

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots \\ &= S_1(x) \cdot S_2(x),\ x \in (-R, R).\end{aligned}$$

3. 逐项求导数

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则在 $(-R, R)$ 内和函数 $S(x)$ 可导，且有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

所得幂级数的收敛半径仍为 R，但在收敛区间端点处的敛散性可能改变.

4. 逐积分

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，则在 $(-R, R)$ 内和函数 $S(x)$ 可积，且有

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a^n x^{n+1},$$

所得幂级数的收敛半径仍为 R，但在收敛区间端点处的敛散性可能改变.

例 4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的和函数.

解 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的和函数为 $S(x)$，在其收敛域内有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x},\ x \in (-1, 1),$$

所以

$$S(x)=\int_0^x \frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x).$$

又当 $x=-1$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；当 $x=1$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$，$x\in[-1,1)$.

综上可知：幂级数在其收敛区间内就像普通的多项式一样，可以相加、相减、逐项求导、逐项积分.

习题 7.3

A

1. 求下列幂级数的收敛区间.

(1) $-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots$；

(2) $\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{3^2}+\frac{3x^3}{3^3}+\cdots+\frac{nx^n}{3^n}+\cdots$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$；

(4) $1+x+2^2x^2+3^3x^3+\cdots+n^nx^n+\cdots$.

2. 利用幂级数逐项求导或逐项积分，求下列幂级数的收敛区间，并求和函数.

(1) $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$；

(2) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots$.

B

1. 求下列幂级数的收敛区间.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}x^n$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(x-5)^n$；

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}n!\,x^n$.

2. 利用幂级数逐项求导或逐项积分，求下列幂级数的收敛区间，并求和函数.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n-1}$；(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

习题 7.3
参考答案

第四节 函数的幂级数展开式

我们知道，幂级数的每一项都是幂函数，它的部分和 $S_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式，在其收敛域内，幂级数的和函数 $S(x)$ 就可以用它的部分和 $S_n(x)$ 来逼近，而且误差 $R_n = S(x)-S_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时趋于零，所以这种逼近可以达到任意的精确度. 这就启发我们用多项式去逼近一个比较复杂的函数，从而得到近似. 这个问题实质上就是把已知函数展开成幂级数的问题.

那么对于任意一个函数 $f(x)$，能否将其展开成一个幂级数？如果能够展开成一个幂级数，它是否以 $f(x)$ 为和函数？

一、泰勒级数

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有直到 $n+1$ 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{7-3}$$

称(7－3)式为泰勒公式(不加证明)，其中 $R_n(x)$ 称为余项.

课堂练习 7.1

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有任意阶导数，我们就可得到如下一个幂级数：

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \tag{7-4}$$

称幂级数(7-4)为函数 $f(x)$在点 x_0 处的泰勒级数.

显然,在点 $x=x_0$ 处,$f(x)$ 的泰勒级数收敛于 $f(x_0)$;但除了点 $x=x_0$ 处外,$f(x)$ 是否一定收敛? 如果收敛,它是否一定收敛于 $f(x)$? 关于这些问题,我们有如下定理.

定理 7.5 若函数在点 x_0 的左右附近有任意阶导数,则函数的泰勒级数收敛于 $f(x)$,即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \tag{7-5}$$

成立的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0 \quad \text{(证明从略)}.$$

我们把公式(7-5)叫做函数 $f(x)$在点 x_0 左右附近展成泰勒级数.

在泰勒级数展开式(7-5)中,如果取 $x_0=0$,由(7-5)有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots, \tag{7-6}$$

称公式(7-6)为 $f(x)$的麦克劳林级数展开式.

函数展开成关于 x 的幂级数,则这个幂级数一定是麦克劳林级数,即函数的幂级数展开式是唯一的,它一定与 $f(x)$的麦克劳林级数(7-6)相一致. 定理也说明,任意一个函数只要有任意阶的导数,就可以展开成幂级数的形式,并且展开式是唯一的. 在一定条件下,幂级数展开式在其收敛域内收敛于 $f(x)$.

下面研究将函数展开为幂级数的方法.

二、函数展为幂级数的直接展开法

利用公式(7-5)或(7-6)将函数 $f(x)$展开成幂级数的方法,称为直接展开法.

麦克劳林级数即是将函数展开成 x(在点 $x=0$ 处) 的幂级数,泰勒级数即是将函数展开成$(x-x_0)$(在点 $x=x_0$ 处) 的幂级数.

在第三节我们知道的如下两个级数及其和函数,正是函数的麦克劳林级数的展开式:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,\ x\in(-1,1),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,\ x\in(-1,1).$$

例 1 将函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由于 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x\ (n=1,2,3,\cdots)$，所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1,$$

于是，得

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,$$

它的收敛半径 $R=+\infty$ 于是，得展开式

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).$$

例 2 将函数 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由于

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)(n=0,1,2,3,\cdots),$$

将 $x=0$ 代入得

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f^{(3)}(0)=-1,\ \cdots,$$
$$f^{(2n)}(0)=0,\ f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n,\ \cdots$$

于是得 $f(x)=\sin x$ 的麦克劳林展开式

$$\begin{aligned}\sin x&=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

即

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

三、间接展开法

以上将函数展开成幂级数的例子，是直接按公式 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 求得系数，这种直接展开的方法计算量较大，下面我们利用一些已知函数的展开式，运用幂级数的运算（如四

则运算、逐项求导、逐项积分)以及变量代换等,将所给函数展开成幂级数,这种求函数的幂级数展开式的方法称为间接展开法.

例 3 将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成麦克劳林级数.

解 已知

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

逐项微分,得

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}.$$

由于幂级数展开式是唯一的,所以上式就是 $\cos x$ 的麦克劳林级数.

例 4 将函数 $f(x)=\arctan x$ 展开成麦克劳林级数.

解 因为

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\ x\in(-1,1),$$

将 x 换成 x^2,得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,$$

两边积分,得

$$\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^x\mathrm{d}x-\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^x x^4\mathrm{d}x-\int_0^x x^6\mathrm{d}x+\cdots+(-1)^n\int_0^x x^{2n}\mathrm{d}x+\cdots,$$

即

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,\ x\in[-1,1].$$

最后,我们将几个常用函数的幂级数展开式列在下面,以便读者查用.

(1) $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ x\in(-1,1)$;

(2) $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ x\in(-1,1)$;

(3) $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty,+\infty)$;

(4) $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n,\ x\in(-1,1]$;

(5) $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(7) $\arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{(2n+1)}}{2n+1}+\cdots$, $x\in[-1,1]$.

习题 7.4

A

将下列函数展开为麦克劳林级数,并写出其收敛区间.

(1) $y=e^{2x}$;　　(2) $y=\sin^2 x$.

B

将下列函数展开为麦克劳林级数,并写出其收敛区间.

(1) $y=a^x\ (a>0,\ a\neq 1)$;　　(2) $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

(3) $y=\dfrac{x}{4-x}$;　　(4) $y=\ln(a+x)\quad(a>0)$.

习题 7.4
参考答案

第五节　傅里叶级数

在物理学和电子工程技术中,经常要遇到另一类重要的函数项级数,即所谓的三角级数.傅里叶级数是三角级数的特殊形式,本节我们主要讨论傅里叶级数的敛散性及如何将一个周期函数展开成为傅里叶级数的问题.

一、三角级数

1. 三角级数的形式

三角级数的一般形式为

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{7-7}$$

其中 a_0，a_n，$b_n(n=1, 2, \cdots)$ 都是常数，称为系数. 特别地，当 $a_n=0(n=0, 1, 2, \cdots)$ 时，级数中只含有正弦项，称之为正弦级数. 当 $b_n=0(n=1, 2, \cdots)$ 时，级数中只含常数项和余弦项，称为余弦级数. 级数(7－7)中的每一项均是周期函数，因此可以用它来描述复杂的周期现象.

2. 三角函数的正交性

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，我们可以看成是幂函数系$\{1, x, x^2, \cdots\}$的线性组合，同样，我们可以把三角级数(7－7)看成三角函数系

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}\tag{7-8}$$

的线性组合.

三角函数系有一个重要的性质，即如下定理所述.

定理 7.6(三角函数系的正交性) 三角函数系(7－8)中任意两个不同函数的乘积在区间$[-\pi, \pi]$上的积分等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (k, n=1, 2, \cdots, n\neq k),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (k, n=1, 2, \cdots, n\neq k),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (k, n=1, 2, \cdots, n\neq k).$$

三角函数系中任何两个相同的函数的乘积在区间$[-\pi, \pi]$上的积分不等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2\,\mathrm{d}x=2\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,\mathrm{d}x=\pi \quad (n=1, 2, \cdots).$$

以上各式证明从略.

二、傅里叶级数

设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，且能展开成三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\tag{7-9}$$

那么系数 a_0，a_1，b_1，…与函数 $f(x)$之间存在着怎样的关系？

假定三角级数可逐项积分，则

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right),$$

利用三角函数系的正交性定理可知，上式右端除了第一项外都为 0，因此

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x=\pi a_0.$$

于是，得到 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

为求得 a_n，先用 $\cos kx$ 乘以式(7-7)的两端，再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos kx\,\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,\mathrm{d}x+\right.$$
$$\left.b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,\mathrm{d}x\right).$$

利用三角函数系的正交性定理可知，上式右端除了 $k=n$ 这一项外其余项都为 0，因此

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,\mathrm{d}x=a_n\pi,$$

于是，得到

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots).$$

类似地，为了求得 b_n，可利用 $\sin kx$ 乘以(7-9)式两端，再从 $-\pi$ 到 π 逐项积分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=b_n\pi.$$

于是，得到

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

所以

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x,\\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots),\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).\end{cases}\tag{7-10}$$

这种方法求得的系数 a_0，a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n 叫做函数 $f(x)$的傅里叶系数，简称傅氏系数.由傅里叶系数得到的三角级数叫做函数 $f(x)$的傅里叶级数.

一个定义在$(-\infty, +\infty)$上周期为 2π 的函数 $f(x)$，如果它在一个周期上可积，则一定可以作出 $f(x)$的傅里叶级数，然而，函数 $f(x)$的傅里叶级数是否一定收敛？如果它收敛，它是否一定收敛于函数 $f(x)$？一般来说，这两个问题的答案都不是肯定的，那么，$f(x)$满足什么条件可以展开成傅里叶级数？下面给出关于上述问题的一个主要结论.

定理 7.7(狄利克雷收敛定理，简称狄氏定理) 设函数 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，如果它在区间$[-\pi, \pi]$上满足条件：

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；

(2) 在一个周期内至多只有有限个极值点；

则 $f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi, \pi]$上收敛，并且

当 x 是 $f(x)$的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；

当 x 是 $f(x)$的间断点时，级数收敛于 $\dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$(证明从略).

例 1 设 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数，它在$[-\pi, \pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi \leqslant x<0, \\ 1, & 0 \leqslant x<\pi.\end{cases}$$

求 $f(x)$的傅里叶级数，并讨论其敛散性.

解 傅里叶系数计算如下

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\times\cos nx\,\mathrm{d}x=0$$
$$(n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$\begin{aligned}b_n &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\times\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}=\frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi-\cos n\pi+1) \\ &=\frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & n=1, 3, 5, \cdots, \\ 0, & n=2, 4, 6, \cdots.\end{cases}\end{aligned}$$

于是 $f(x)$的傅里叶级数为

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}3x+\cdots+\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x+\cdots\right]$$

傅里叶级数的展开

$$(-\infty < x < +\infty;\ x \neq 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \cdots).$$

所给函数满足收敛定理的条件，它在点 $x = n\pi(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 处不连续，在其他点处连续，从而由收敛定理知道 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且当 $x = n\pi$ 时收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] = \frac{1}{2}(-1+1) = 0,$$

当 $x \neq n\pi$ 时收敛于 $f(x)$.

例 2 将函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$$

展开成傅里叶级数.

解 所给函数在区间$[-\pi, \pi]$上满足收敛定理的条件，并且在$[-\pi, \pi]$外作为拓广的周期函数时，它在每一点 x 处都连续，因此对应的傅里叶级数在$[-\pi, \pi]$上收敛于 $f(x)$.

计算傅里叶系数如下：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} = \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} \\ &= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \\ &= \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi}, & n = 1, 3, 5, \cdots, \\ 0, & n = 2, 4, 6, \cdots, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big|_{0}^{\pi}$$

$$=0\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

将求得的系数代入式(7-9),得到 $f(x)$ 的傅里叶展开式为

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

习题 7.5

A

以下两个以 2π 为周期的函数,给出了在 $(-\pi,\pi)$ 上的表达式,将其展开成傅里叶级数.

(1) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$, $x\in(-\pi,\pi)$;

(2) $f(x)=x^2$, $x\in(-\pi,\pi)$.

B

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

习题 7.5
参考答案

第六节　周期函数的傅里叶级数展开式

一、正弦级数与余弦级数

当 $f(x)$ 为偶函数时,$f(x)\sin nx$ 为奇函数,$f(x)\cos nx$ 为偶函数,则

$$\begin{cases} b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,\cdots),\\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),\\ a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x.\end{cases}\quad(7-11)$$

此时傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

称之为余弦级数.

当 $f(x)$为奇函数时，$f(x)\cos nx$ 为奇函数,$f(x)\sin nx$ 为偶函数,则

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0 \quad (n=0,1,2,\cdots),\\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots),\\ a_1=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0.\end{cases} \tag{7-12}$$

此时傅里叶级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,$$

称之为正弦级数.

二、在[−π, π]上将函数展开成正弦级数或余弦级数

例 1 设函数 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数,它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为 $f(x)=x$. 将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

解 首先,判断所给函数满足收敛定理的条件,它在点

$$x=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

处不连续,因此 $f(x)$的傅里叶级数在点 $x=(2k+1)\pi$ 处收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0,$$

又因为在连续点 $x(x\neq(2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$,所以函数满足收敛定理的条件.

其次,若不计 $x=(2k+1)\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,则 $f(x)$是周期为 2π 的奇函数. 显然,此时下式成立:

$$\begin{cases}a_n=0 \quad (n=0,1,2,3,\cdots),\\ b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{x\cos nx}{n}+\dfrac{\sin nx}{n^2}\right)\Bigg|_0^{\pi}\\ \quad =-\dfrac{2}{n}\cos n\pi=\dfrac{2}{\pi}(-1)^{n-1} \quad (n=1,2,3,\cdots).\end{cases}$$

将求得的 b_n 代入正弦级数，得 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式为

$$f(x)=2\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx+\cdots\right)$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx \quad (-\infty<x<+\infty;\ x\neq\pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \cdots)$$

如果函数只在 $[0,\pi]$ 上有定义且满足收敛定理的条件，先在开区间 $(-\pi,0)$ 内补充 $f(x)$ 的定义，得到定义在 $(-\pi,\pi]$ 上的函数 $F(x)$，使它在区间 $(-\pi,\pi)$ 上成为奇函数（偶函数）. 按这种方式拓广函数定义域的过程称为奇延拓（偶延拓）. 然后将奇延拓（偶延拓）后的函数展开成傅里叶级数，这个级数必定是正弦级数（余弦级数）. 再限制 x 在 $(0,\pi]$ 上，此时 $F(x)=f(x)$，这样便得到 $f(x)$ 的正弦级数（余弦级数）展开式. 而在区间端点 $x=0$，$x=\pi$ 以及区间 $(0,\pi)$ 内间断点处，则可根据收敛定理判别其敛散情况.

例 2　将函数 $f(x)=x+1\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

解　先展开成正弦级数. 为此对函数进行奇延拓：

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ x-1, & -\pi<x<0.\end{cases}$$

此时按上面公式(7－12)有

$$\begin{cases}a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots),\\ a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=0,\\ b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x\\ \quad=\dfrac{2}{n\pi}[1-(\pi+1)\cos n\pi]=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\times\dfrac{\pi+2}{n} & (n=1,3,5,\cdots),\\ -\dfrac{2}{n} & (n=2,4,6,\cdots).\end{cases}\end{cases}$$

所以，$f(x)$ 的正弦级数展开式为

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right]$$
$$(0<x<\pi).$$

在端点 $x=0$ 及 $x=\pi$ 处函数间断，级数的和为零，它不代表原来函数的值.

再展开成余弦级数. 为此对函数进行偶延拓：

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1-x, & -\pi<x<0.\end{cases}$$

按上面公式(7－11)有

$$\begin{cases} b_n=0 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots), \\ a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\mathrm{d}x=\pi+2, \\ a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ \quad =\dfrac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\begin{cases} -\dfrac{4}{n^2\pi} \quad (n=1,\ 3,\ 5,\ \cdots), \\ 0 \quad (n=2,\ 4,\ 6,\ \cdots). \end{cases} \end{cases}$$

由于偶延拓后，$f(x)$在 $x=0$ 及 $x=\pi$ 都连续，所以由收敛定理得 $f(x)$的余弦级数展开式为

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right) \quad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

习题 7.6

A

将 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$ 在$[0,\ \pi]$上展开成以 2π 为周期的正弦级数.

B

将 $f(x)=2x^2$ 在$[0,\ \pi]$ 上展开成余弦级数.

习题 7.6
参考答案

本 章 小 结

一、学习目标与要求

1. 理解无穷级数的收敛、发散及级数和的概念.
2. 掌握无穷级数收敛的必要条件，了解无穷级数的基本性质.
3. 掌握等比级数和 p -级数的敛散性，会用正项级数的比较审敛法、比值审敛法判断敛散性.
4. 了解幂级数及其收敛半径的概念，会求幂级数的收敛半径和收敛区间.
5. 了解泰勒公式和函数展开成泰勒级数的充要条件.

6. 掌握几个常用函数的麦克劳林级数展开式.

7. 了解傅里叶级数及周期函数的傅里叶级数展开式(选学内容).

二、本章主要内容

1. 常数项级数的敛散性

常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在；收敛必要条件为 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

判定一个常数项级数是否收敛，有下列主要方法：

(1) 利用级数收敛的必要条件，判别一些级数的发散；

(2) 利用收敛定义，即考查 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 是否存在；

(3) 若为正项级数，则可利用比较审敛法或比值审敛法.

2. 正项级数的比较审敛法、比值审敛法

(1) 正项级数的比较审敛法

设两个正项级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{，且 } u_n \leqslant v_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

(2) 正项级数的比值审敛法

如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，满足条件：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

那么，当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；当 $\rho > 1$ 或 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$ 时，级数发散；当 $\rho = 1$ 时，级数可能收敛也可能发散.

3. 幂级数的审敛定理及收敛半径

设有幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

如果极限

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho,$$

那么，当 $|x|<\frac{1}{\rho}$ 时，幂级数收敛；当 $|x|>\frac{1}{\rho}$ 时，幂级数发散；当 $\rho=0$ 时，级数在 $|x|<+\infty$ 时收敛；当 $\rho=+\infty$ 时，级数仅在点 $x=0$ 处收敛.

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 内收敛.

4. 泰勒级数与麦克劳林级数

若函数在 x 的左右附近有任意阶导数，则函数的泰勒级数展开式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

如果取 $x_0=0$，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

称之为 $f(x)$ 的麦克劳林级数展开式.

5. 幂级数的直接展开法与间接展开法

将一个函数展开成幂级数，有直接展开法和间接展开法.

间接展开法与直接展开法相比，有以下优点：

(1) 避免直接展开法中求系数时的复杂运算，而由基本展开式可直接求出.

(2) 根据幂级数运算保持敛散性不变的性质，由基本展开式可直接求出展开式的收敛区间，因此不必通过求收敛半径等讨论敛散性.

6. 三角级数与傅里叶级数

三角级数的一般形式为

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

傅里叶系数公式为

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x, \\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x \quad (k=1,2,\cdots), \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k=1,2,\cdots). \end{cases}$$

7. 狄利克雷收敛定理

设函数 $f(x)$是周期为 2π 的周期函数,如果它在区间$[-\pi,\pi]$上满足条件:

(1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点.

(2) 在一个周期内至多只有有限个极值点.

则 $f(x)$的傅里叶级数在$[-\pi,\pi]$收敛,并且

① 当 x 是 $f(x)$的连续点时,级数收敛于 $f(x)$.

② 当 x 是 $f(x)$的间断点时,级数收敛于 $\dfrac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

综合复习题七

1. 选择题.

(1) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,k 为常数($k\neq 0$),则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$(　　).

A. 发散　　B. 可能收敛　　C. 收敛　　D. 有界

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 是(　　).

A. 幂级数　　B. 调和级数　　C. p -级数　　D. 等比级数

(3) 在下列级数中,发散的是(　　).

A. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$

(4) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$ 则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$(　　).

A. 必收敛于$\frac{1}{u_1}$　　B. 敛散性不能判定

C. 必收敛于 0　　D. 一定发散

(5) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为$R(0<R<+\infty)$，则幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{x}{2}\right)^n$ 的收敛半径为(　　).

A. $\frac{R}{2}$　　B. $2R$　　C. R　　D. $\frac{2}{R}$

2. 判定下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2\frac{\pi}{3}}{2^n}$；　　(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^{10} n}$.

3. 求下列幂级数的收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{n}x^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x+1)^n$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}x^{2n}$.

4. 求下列常数项级数或幂级数的和.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$.

5. 将函数 $f(x)=\frac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

6. 把 $f(x)=1-x(0\leqslant x\leqslant \pi)$ 展开成正弦级数和余弦级数.

综合复习题七
参考答案

阅读材料七

傅里叶究竟干了什么

傅里叶(Fourier，1768—1830)，法国数学家、物理学家. 他 1768 年 3 月 21 日生于欧塞尔，1830 年 5 月 16 日卒于巴黎. 他 9 岁父母双亡，被当地教堂收养，12 岁由一位主教送入地方军事学校读书，17 岁(1785 年)回乡教数学，1794 年来到巴黎，成为高等师范学校的首批学员，次年到巴黎综合工科学校执教. 1798 年他随拿破仑远征埃及时任军中文书

和埃及研究院秘书,1801 年回国后任伊泽尔省地方长官.1817 年他当选为科学院院士,1822 年任该院终身秘书,后又任法兰西学院终身秘书和理工科大学校务委员会主席.

傅里叶在数学方面的主要贡献是在研究热的传播时创立的一套数学理论.1807 年傅里叶向巴黎科学院呈交论文《热的传播》,推导出著名的热传导方程,并在求解该方程时发现解函数可以由三角函数构成的级数形式表示,从而提出任一函数都可以展开成三角函数的无穷级数.傅里叶级数(即三角级数)、傅里叶分析等理论均由此创始.傅里叶的其他贡献有:最早使用定积分符号,改进了代数方程符号法则的证法和实根个数的判别法等.傅里叶变换的基本思想首先由傅里叶提出,所以以其名字来命名.从现代数学的眼光来看,傅里叶变换是一种特殊的积分变换.它能将满足一定条件的某个函数表示成正弦基函数的线性组合或者积分.在不同的研究领域,傅里叶变换具有多种不同的变体形式,如连续傅里叶变换和离散傅里叶变换.傅里叶变换属于调和分析的内容.“分析”二字,可以解释为深入的研究.从字面上来看,“分析”二字,实际就是“条分缕析”而已.它通过对函数的“条分缕析”来达到对复杂函数的深入理解和研究.从哲学上看,“分析主义”和“还原主义”,就是要通过对事物内部适当的分析达到增进对其本质理解的目的.比如近代原子论试图把世界上所有物质的本源分析为原子,而原子不过数百种而已,相对物质世界的无限丰富,这种分析和分类无疑为认识事物的各种性质提供了很好的手段.在数学领域也是这样,尽管最初傅里叶分析是作为热的传播过程的解析分析工具,但是其思想方法仍然具有典型的还原主义和分析主义的特征.“任意”的函数通过一定的分解,都能够表示为正弦函数的线性组合的形式,而正弦函数在物理上是被充分研究而相对简单的函数类型,这一想法跟化学上的原子论想法何其相似!奇妙的是,现代数学发现傅里叶变换具有如下良好的性质,使得它如此好用和有用,让人不得不感叹造物的神奇.

(1) 傅里叶变换是线性算子,若赋予适当的范数,它还是酉算子.

(2) 傅里叶变换的逆变换容易求出,而且形式与正变换非常类似.

(3) 正弦基函数是微分运算的本征函数,从而使得线性微分方程的求解可以转化为常系数的代数方程的求解.在线性时不变的物理系统内,频率是个不变的性质,从而系统对于复杂激励的响应可以通过组合其对不同频率正弦信号的响应来获取.

(4) 著名的卷积定理指出,傅里叶变换可以化复杂的卷积运算为简单的乘积运算,从而提供了计算卷积的一种简单手段.

(5) 离散形式的傅里叶变换可以利用数字计算机快速算出(其算法称为快速傅里叶变换算法,简称 FFT).

正是由于上述的良好性质,傅里叶变换在物理学、数论、组合数学、信号处理、概率、统计、密码学、声学、光学等领域都有着广泛的应用.

HEP

拓展模块

数学实验与数学建模

CHAPTER 1

拓展模块 I 数学实验

由于当今计算机科学的飞速发展，许多生产和管理过程都由计算机来控制. 同时，由于计算机技术的提高，不少原来用人工无法计算的问题，现在可由计算机来实现. 计算机软件是解决实际问题十分有力的工具.

MATLAB 是一个集数值计算、符号分析、图像显示、文字处理于一体的大型集成化数学软件. MATLAB 拥有的强大功能，它能使使用者从繁重的计算工作中解脱出来，所以，MATLAB 已成为应用极其广泛的基本数学软件. 学习和掌握数学软件应用，是数学理论和方法与现代计算机技术有机结合的必然趋势. 我们通过使用 MATLAB 软件开展数学实验，初步认识 MATLAB 软件环境、使用方法，通过数学实验了解微积分计算中 MATLAB 的应用，提高数学学习的实用性、趣味性.

第一节 初识 MATLAB

MATLAB 是 matrix laboratory（矩阵实验室）的缩写，是由美国 MathWorks 公司于 20 世纪 80 年代初推出的一套以矩阵计算为基础的、适合多学科、多种工作平台的功能强大的大型软件. MATLAB 将数值计算、可视化和编程功能集成在非常便于使用的环境中，具有编程效率高、用户使用方便、扩充能力强、移植性好等特点. 经过 MathWorks 公司的不断完善，目前 MATLAB 已经发展成为国际上最优秀的高性能科学与工

程计算软件之一.

1. MATLAB 优势

(1) 高效的数值计算及符号计算功能,能使用户从繁杂的数学运算分析中解脱出来.

(2) 具有完备的图形处理功能,实现计算结果和编程的可视化.

(3) 友好的用户界面及接近数学表达式的自然化语言,使学习者易于学习和掌握.

(4) 功能丰富的应用工具箱(如信号处理工具箱、通信工具箱等),为用户提供了大量方便实用的处理工具.

2. 编程环境

MATLAB 由一系列工具组成. 这些工具方便用户使用 MATLAB 的函数和文件,其中许多工具采用的是图形用户界面,包括 MATLAB 桌面和命令窗口、历史命令窗口、编辑器和调试器、路径搜索和用于用户浏览帮助、工作空间、文件的浏览器. 随着 MATLAB 的商业化以及软件本身的不断升级,MATLAB 的用户界面也越来越精致,更加接近 Windows 的标准界面,人机交互性更强,操作更简单. 而且新版本的 MATLAB 提供了完整的联机查询、帮助系统,极大地方便了用户的使用. 简单的编程环境提供了比较完备的调试系统,使程序不必经过编译就可以直接运行,而且能够及时地报告出现的错误及进行出错原因分析.

MATLAB 是一个高级的矩阵/阵列语言,它包含控制语句、函数、数据结构、输入和输出,并具有面向对象编程特点. 用户可以在命令窗口中将输入语句与执行命令同步,也可以先编写好一个较大的复杂的应用程序(M 文件)再一起运行. 新版本的 MATLAB 语言是基于最为流行的 C++语言基础上编写的,因此语法特征与 C++语言极为相似,而且更加简单,更加符合科技人员对数学表达式的书写格式,使之更利于非计算机专业的科技人员使用. 而且这种语言可移植性好、可拓展性极强,这也是 MATLAB 能够深入到科学研究及工程计算各个领域的重要原因.

3. 强大运用

MATLAB 是一个包含大量计算算法的集合. 其拥有 600 多个工程中要用到的数学运算函数,可以方便地实现用户所需的各种计算功能. 函数中所使用的算法都是科研和工程计算中的最新研究成果,而且经过了各种优化和容错处理. 在通常情况下,可以用它来代替底层编程语言,如 C 和 C++. 在计算要求相同的情况下,使用 MATLAB 的编程工作量会大大减少. MATLAB 的这些函数集包括从最简单、最基本的函数到诸如矩阵、特征向量、快速傅里叶变换算法等复杂函数. 这些函数所能解决的问题大致包括矩阵运算和线性方程组的求解、微分方程及偏微分方程的组的求解、符号运算、傅里叶变换和数据的统计分析、工程中的优化问题、稀疏矩阵运算、复数的各种运算、三角函数和其他初等数学运算、多维数组操作以及建模动态仿真等.

4. 图形处理

MATLAB 自诞生之日起就具有方便的数据可视化功能,可以将向量和矩阵用图形

表现出来，并且可以对图形进行标注和打印. 高层次的作图包括二维和三维的可视化、图像处理、动画和表达式作图. 可用于科学计算和工程绘图. 新版本的 MATLAB 对整个图形处理功能作了很大的改进和完善，使它不仅在一般数据可视化软件都具有的功能(如二维曲线和三维曲面的绘制和处理等)方面更加完善，而且对于一些其他软件所没有的功能(如图形的光照处理、色度处理以及四维数据的表现等)，MATLAB 同样表现了出色的处理能力. 同时对一些特殊的可视化要求，如图形对话等，MATLAB 也有相应的功能函数，保证了用户不同层次的要求. 另外新版本的 MATLAB 还着重在图形用户界面(GUI)的制作上作了很大的改善，对这方面有特殊要求的用户也可以得到满足.

5. 模块工具

MATLAB 对许多专门的领域都开发了功能强大的模块集和工具箱. 一般来说，它们都是由特定领域的专家开发的，用户可以直接使用工具箱学习、应用和评估不同的方法而不需要自己编写代码. 各种专业领域，诸如数据采集、数据库接口、概率统计、样条拟合、优化算法、偏微分方程求解、神经网络、小波分析、信号处理、图像处理、系统辨识、控制系统设计、LMI 控制、鲁棒控制、模型预测、模糊逻辑、金融分析、地图工具、非线性控制设计、实时快速原型及半物理仿真、嵌入式系统开发、定点仿真、DSP 与通信、电力系统仿真等，都在工具箱(Toolbox)家族中有了自己的一席之地.

第二节 MATLAB 的工作环境

假定在您的计算机里已经安装了 MATLAB 7.0，在 Windows 桌面上就会出现 MATLAB 7.0 的图标. 双击此图标，进入 MATLAB 的工作界面. MATLAB 7.0 的工作界面主要由菜单、工具栏、命令窗口、工作空间管理窗口、命令历史窗口和当前目录窗口组成.

进入 MATLAB 之后，会看到一个 MATLAB Command Window，称为命令窗口，它是最主要的窗口，是键入命令和显示计算结果的地方. 另外还有一个编程窗口，专门用来编辑应用程序. 还有一个主窗口，用来记录已使用过的历史命令和已打开的目录，方便使用者查找. 绘图时还会自动弹出一个绘图窗口，专门用来显示绘制的图形.

1. 菜单和工具栏

MATLAB 的菜单和工具栏界面与 Windows 程序的界面类似，只要稍加实践就可以掌握其功能和使用方法.

2. 命令窗口(Command Window)

MATLAB 命令窗口是用来接受 MATLAB 命令的窗口. 在命令窗口中直接输入命

令,可以实现显示、清除、储存、调出、管理、计算和绘图等功能. MATLAB 命令窗口中的符号“＞＞”为运算提示符,表示 MATLAB 处于准备状态. 当在提示符后输入一段程序或一段运算式后按 Enter 键,MATLAB 会给出计算结果并将其保存在工作空间管理窗口中,然后再次进入准备状态.

在命令窗口中实现管理功能的常用命令如下.

＞＞cd	显示当前工作目录;
＞＞dir	显示当前工作目录或指定目录下的文件;
＞＞clc	清除命令窗口中的所有内容;
＞＞clf	清除图形窗口;
＞＞quit(exit)	退出 MATLAB;
＞＞type test	在命令窗口中显示文件 test.m 的内容;
＞＞delete test	删除文件 test.m;
＞＞which test	显示 test.m 的目录;
＞＞what	显示当前目录或指定目录下的 M、MAT、MEX 文件.

为了便于对输入的内容进行编辑,MATLAB 提供了一些控制光标位置和进行简单编辑的一些常用编辑键,掌握它们就可以在输入命令的过程中起到事半功倍的效果.

↑	调用上一行;	↓	调用下一行;
←	光标左移一个字符;	→	光标右移一个字符;
Home	光标置于当前行首;	End	光标置于当前行尾;
Del	删除光标处的字符;	Backspace	删除光标前的字符.

在以上按键中,反复使用“↑”,可以调出以前键入的所有命令,进行修改、计算.

3. 工作空间管理窗口(Workspace)

工作空间管理窗口显示当前 MATLAB 的内存中使用的所有变量的变量名、变量的大小和变量的数据结构等信息,数据结构不同的变量对应着不同的图标.

在命令窗口中,实现变量的显示、清除、储存和调出的命令如下.

＞＞who	显示当前工作空间中的所有变量名;
＞＞whos	显示当前工作空间中的所有变量的变量名、变量的大小和数据类型;
＞＞whos x	显示工作空间中的变量 x 的大小、数据类型;
＞＞disp(x)	显示变量 x 的内容;
＞＞clear	清除工作空间中的所有变量;
＞＞clear x	清除工作空间中的变量 x;
＞＞save 文件名	把工作空间中的变量保存在当前 MATLAB 目录下产生的一个扩展名为 mat 的文件中;
＞＞load 文件名	把该 mat 文件中的变量调入到 MATLAB 的内存中.

4. 命令历史窗口(Command History)

命令历史窗口显示所有执行过的命令.在默认设置下,该窗口会保留自 MATLAB 安装后使用过所有命令,并表明使用的时间.利用该窗口,一方面可以查看曾经执行过的命令;另一方面,可以重复利用原来输入的命令,这只要在命令历史窗口中直接双击某个命令,就可以执行该命令.

5. 当前目录窗口(Current Directory)

当前目录窗口显示当前目录下所有文件的文件名、文件类型和最后修改时间.

6. MATLAB 的计算

MATLAB 一般有 3 种进行计算的方法.第一种就如同使用计算器,直接输入数值和运算符,立即从屏幕上获得结果.第二种先对变量赋值,然后再输入由变量构成的表达式,也可立即获得结果.第三种,就是采用编程的方法来解决较复杂的,诸如含有判断、循环、迭代、递归等算法的较复杂的问题.上述方法中,第二种和第三种包括了数组和矩阵运算,只要定义了数组和矩阵变量,就可以如同普通代数运算一样直接用变量进行数学运算,十分方便.

MATLAB 提供的基本算术运算有:加(+)、减(-)、乘(*)、除(/)、幂次方(^).

MATLAB 的关系和逻辑运算符号与其他软件基本相同,仅列表Ⅰ-1 加以说明.

表Ⅰ-1

符　号	功　能	符　号	功　能
=	赋值运算	|	逻辑或运算
==	关系运算,相等	~	逻辑非运算
<>	不等于	xor	逻辑异或运算
<	小于	……	续行标志
<=	小于等于	,	分行符,结果不显示
>	大于	;	分行符,结果显示
>=	大于等于	'	矩阵转置
%	注释标志	.'	向量转量
&	逻辑与运算		

MATLAB 对使用变量名称有如下规定:

(1) 变量名称的英文大小写是有区别的(如 apple、Apple、AppLe 三个变量不同).

(2) 变量的长度上限为 31 个字母.

(3) 变量名的第一位必须是英文字母,随后可以掺杂英文字母、数字或是下划线.

如下表Ⅰ-2 给出 MATLAB 所定义的特殊变量及其意义.

表Ⅰ-2

变量名	意　义
help	在线帮助，如 help quit
who	列出所有定义过的变量名称
ans	默认的用来表示计算结果的变量名
eps	极小值=2.220 4e-16
pi	π值
inf	无穷大的数∞
nan	非数值

7. MATLAB搜索路径与扩展

当MATLAB调用函数或执行程序文件时，对函数或程序文件的搜索，都是在其搜索路径下进行的. 如果用户调用的函数在搜索路径之外，MATLAB会认为此函数并不存在. 一般情况下，MATLAB系统的函数(包括工具箱函数)都在系统默认的搜索路径之中，但是用户编写的函数可能没有保存在搜索路径中. 要解决这个问题，只要将函数或程序所在的目录扩展成MATLAB的搜索路径即可.

在MATLAB命令窗口中输入"editpath"命令、"pathtool"命令或使用MATLAB窗口中"File→Set Path"菜单命令，都可以进入"设置搜索路径"对话框，通过该对话框可以为MATLAB添加或删除搜索路径.

8. MATLAB的帮助系统

MATLAB为用户提供了非常完善的帮助系统，例如在线帮助、帮助窗口以及MATLAB演示等. 通过使用帮助菜单或在命令窗口中输入帮助命令，可以很容易地获得MATLAB的帮助信息，进一步学习MATLAB.

(1) 命令窗口查询帮助系统

在命令窗口查询帮助系统最常用的命令是"help". 通过"help"命令，可以在命令窗口获得在线帮助. 调用格式如下：

help　　　在命令窗口列出所有主要的基本帮助主题；

help/　　　在命令窗口列出所有的运算符和特殊字符；

help(函数名)　在命令窗口列出该函数的M文件的描述及用法.

"help(函数名)"是MATLAB中最常用的获取帮助信息的方式，例如：

```
>> help sqrt
SQRT   Square root.
SQRT(X) is the square root of the elements of X. Complex results are produced
if X is not positive.
```

```
See also sqrtm.
Overloaded functions or methods (ones with the same name in other directories)
help sym/sqrt.m
Reference page in Help browser
doc sqrt
```

(2) 联机帮助系统

直接单击 MATLAB 主窗口的“?”按钮,选定 Help 菜单的前 4 项中的任意一项或在命令窗口中执行“helpwin”,“helpdesk”或“doc”命令都可以运行帮助窗口,进入 MATLAB 的联机帮助系统.

帮助向导页面包含 4 个页面,分别是帮助主题(Contents)、帮助索引(Index)、查询帮助(Search)以及演示帮助(Demos).如果知道需要查询的内容的关键字,一般可以选择 Index 或 Search 模式来查询;只知道需要查询的内容所属的主题或是只是想进一步了解和学习某一主题,一般可以选择 Contents 或 Demos 模式来查询.

(3) 联机演示系统

使用 MATLAB 主窗口的“Help→Demos”菜单命令,在命令窗口输入“demos”或直接在帮助页面上选择“Demos”选项都可以进入联机演示系统.通过联机演示系统,用户可以直观、快速地学习 MATLAB 某个工具箱的使用方法,这是有关的参考书籍不能替代的.

初步了解了 MATLAB 及工作环境后,下面将安排四个数学实验,通过 MATLAB 在微积分计算中的应用,了解 MATLAB 的使用方法.

第三节 数学实验项目

实验一 MATLAB 的安装、运行与数值计算

一、目的要求

1. 掌握 MATLAB 的安装
2. 了解 MATLAB 的运行,掌握 MATLAB 的启动和退出的方法
3. 了解 MATLAB 数值计算的基本方法
4. 熟悉 MATLAB 的运行环境

二、实验内容

1. MATLAB 的安装

在 Windows 下安装 MATLAB，桌面上就会出现 MATLAB 的图标. 双击此图标，进入 MATLAB 的工作界面.

2. MATLAB 的运行

启动 MATLAB：双击 MATLAB 图标，进入到 MATLAB 命令窗口（MATLAB Command Window). 在命令窗内，可以输入命令、编程并进行计算.

学会使用“help”命令：在命令窗口内输入“help”命令，按 Enter 键，在屏幕上出现了在线帮助总览.（注意：MATLAB 命令被输入后，必须按 Enter 键才能执行. 为行文方便，以后不再每次提醒“按 Enter 键”.）学会使用“help”命令，是学习 MATLAB 的有效方法. 例如：要想知道 MATLAB 中的基本数学函数有哪些，可以在总览的第五行查到：MATLAB 中的“基本数学函数”用“elfun”表示，于是，可进一步键入：“help elfun”，屏幕上将出现“基本数学函数”表.（注意：“help elfun”之间有空格，以后不再每次提醒.）如果想了解 sin 函数怎样使用，可进一步键入“help sin”. 在工具栏中单击“help”按钮，或单击“?”号按钮，与上面获取帮助信息的方法是等效的.

学会使用“demo”命令：在命令窗口内输入“demo”命令，按 Enter 键，屏幕上将出现演示窗口(MATLAB Demo Window)，它一共有三个窗口，左边的窗口显示欲演示内容的大标题，选定其中一项，右下方的小窗口显示欲演示的具体内容，选中其中一栏，再单击“run”按钮，屏幕上将演示选定的演示程序. 右上方的窗口显示关于大标题的一些说明. 在命令窗口内输入“type(文件名)”，将显示演示程序的 M 文件，仔细研究演示程序的 M 文件，是学习 MATLAB 的又一有效方法.

进入演示窗口还有另一方法：在工具栏中单击“Help”栏，下拉式菜单中单击“examples and demos”项，即可进入演示窗口.

退出：在工具栏中单击“File”按钮，在下拉式菜单中单击“Exit MATLAB”项即可.

3. MATLAB 的数值计算

运行 MATLAB 的可执行文件，进入 MATLAB 工作窗口，在提示符“>>”后输入算术表达式，按 Enter 键即可得到该表达式的值，就如同在计算器中运算一样. 加、减、乘、除、乘方的运算符号依次为“+”“-”“*”“/”“^”.

例 1 计算 $2+3\times5^9$ 的值.

解 在 MATLAB 工作区键入命令：

```
2+3*5^9,
```

按 Enter 键，可得计算结果：

```
ans = 5 859 377
```

MATLAB 会将最近一次的运算结果直接存入变量 ans，变量 ans 代表 MATLAB 运算后的答案，并将其数值显示到屏幕上. 也可以将计算结果赋值给一个自定义的变量，自

定义变量应遵循以下命名规则：

(1) MATLAB 对变量名的大小写是敏感的.

(2) 变量的第一个字符必须为英文字母，而且不能超过 31 个字符.

(3) 变量名可以包含下划线、数字，但不能为空格符、标点.

例 2 计算 $11.3\times1.9^{0.23}+\sin 1$ 的值，并将其赋值给变量 a.

解 键入命令：

```
a = 11.3 * 1.9^0.23 + sin(1)
```

输出结果：

```
a = 13.939 1
```

如果在上述的例子结尾加上“;”，则计算结果不会显示在指令窗口上，要得知计算值只需键入该变量名即可.

MATLAB 可以将计算结果以不同的精确度的数字格式显示，我们可以在命令窗口的 File 菜单下单击 preferences 子菜单，在随之打开的 preferences 对话框中，选取 Command Window 选项，设置 Numerical Format 参数，或者直接在 MATLAB 工作区键入以下指令：format short(这是默认的)，format long 等.

例 3 在命令窗口中键入表达式 $z=x^4+y^4-x^2-e^{x+y}-2xy-y^2$，并求 $x=1$，$y=3$ 时 z 的值.

解 键入命令：

```
>> x = 1;y = 3;
>> z = x^4 + y^4 - x^2 - exp(x + y) - 2 * x * y - y^2
```

输出结果：

```
z = 11.401 8
```

实验二 符号运算与求极限

一、目的要求

1. 掌握符号运算中与求极限有关的指令

2. 了解符号运算中求极限的基本方法

二、实验内容

MATLAB 可以进行符号运算，需要预先定义符号变量. 使用指令 sym 或 syms 定义符号变量.

在 MATLAB 环境下，符号运算是指参与运算的变量都是符号变量，即使是数字也认为是符号变量. 数值变量和符号变量是不同的.

符号运算中与求极限有关的指令都需要以符号表达式作为输入变量.

limit(P)	表达式 P 中自变量趋于零时的极限
limit(P,a)	表达式 P 中自变量趋于 a 时的极限
limit(P,x,a,'left')	表达式 P 中自变量 x 趋于 a 时的左极限
limit(P,x,a,'right')	表达式 P 中自变量 x 趋于 a 时的右极限

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 键入命令：

```
>> syms x
>> P = sym('sin(x)/x');
>> limit(P)
```

输出结果：

```
ans = 1
```

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$.

解 键入命令：

```
>> syms x
>>P = sym('1/x');
>>limit(P,'x',0,'right')
```

输出结果：

```
ans = inf
```

例 3 求 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$.

解 键入命令：

```
>> syms x
>>P = sym('(sin(x+h)-sin(x))/h');h = sym('h');
>>limit(P,h,0)
```

输出结果：

```
ans = cos(x)
```

例 4 $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{(-1)^n+4^n}{3^{n+1}+4^{n+1}}$.

解 键入命令：

```
>> sym n;
>> limit(((-1)^n+4^n)/(3^(n+1)+4^(n+1)),n,inf)
```

输出结果：

```
ans = 1/4
```

例 5 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+4}$.

解 键入命令：

```
>> syms x
>> limit((3*x^3-4*x^2+2)/(7*x^3+4),x,inf)
```

输出结果：

```
ans =3/7
```

例 6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$.

解 键入命令：

```
>> syms x a
>> limit(((x+a)/(x-a))^x,x,inf)
```

输出结果：

```
ans =  exp(2*a)
```

例 7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解 键入命令：

```
>> syms x
>> limit((sin(1/x)+cos(1/x))^x,x,inf)
```

输出结果：

```
ans = exp(1)
```

例 8 求 $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}\right)$.

解 键入命令：

```
>> v=sym('[(1+a/x)^x,exp(-x)]');
>> limit(v,'x',inf,'left')
```

输出结果：

```
ans = [ exp(a),      0]
```

实验三　符号运算与求导数

一、目的要求

1. 掌握符号运算中与求导数有关的指令及应用

2. 了解符号运算中求导数的基本方法

二、实验内容

符号运算中与求导数有关的指令为

diff(S,v)　　　求表达式 S 对变量 v 的一阶导数

diff(S,v,n)　　求表达式 S 对变量 v 的 n 阶导数

例 1　$y=a^a+a^x+x^a+x^{ax}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　键入命令：

```
>> syms x a
>> diff(a^a+a^x+x^a+x^(a*x),x)
```

输出结果：

```
ans = a^x*log(a)+x^a*a/x+x^(a*x)*(a*log(x)+a)
```

例 2　$f(x)=\arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$，求 $f'(1)$.

解　键入命令：

```
>> syms x
>> y=diff(asin((1-x^2)/(1+x^2)),x),x=1;eval(y)
```

输出结果：

```
y=(-2*x/(1+x^2)-2*(1-x^2)/(1+x^2)^2*x)/(1-(1-x^2)^2/(1+x^2)^
2)^(1/2)
ans = -1
```

例 3　设 $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$，求 $\mathrm{d}y$.

解　键入命令：

```
>> syms x
>> dy=diff(log(x+sqrt(a^2+x^2)))
```

输出结果：

```
dy = (1+1/(a^2+x^2)^(1/2)*x)/(x+(a^2+x^2)^(1/2))
```

例 4　$y=x^2\ln(1+x)$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1}$.

解　键入命令：

```
>> syms x
>> y=x^2*log(1+x);
>> diff(y,2),x=1;eval(ans)
```

输出结果：

```
ans = 2*log(1+x)+4*x/(1+x)-x^2/(1+x)^2
ans =2048/653
```

例 5 求 $y=\sin x+e^x$ 的三阶导数.

解 键入命令:

```
>> syms x
>>diff(' sin(x) + x * exp(x)',3)
```

输出结果:

```
ans =  - cos(x) + 3 * exp(x) + x * exp(x)
```

实验四 符号运算与求积分

一、目的要求

1. 掌握符号运算中与求积分有关的指令及应用
2. 了解符号运算中求一元函数积分的基本方法

二、实验内容

符号运算中与求积分有关的指令为

int(P)	对表达式 P 进行不定积分
int(P,v)	以 v 为积分变量对 P 进行不定积分
int(P,v,a,b)	以 v 为积分变量,以 a 为下限,b 为上限对 P 进行定积分

1. 在 MATLAB 中计算下列不定积分

例 1 $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$.

解 键入命令:

```
>> syms x
>> int((sin(x))^4 * (cos(x))^2)
```

输出结果:

```
ans =
 - 1/6 * sin(x)^3 * cos(x)^3 - 1/8 * sin(x) * cos(x)^3 + 1/16 * cos(x) * sin(x) +
1/16 * x
```

例 2 $\int \frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx$.

解 键入命令:

```
>> syms x
>> int(' - 2 * x/(1 + x^2)^2')
```

输出结果:

```
ans = 1/(1 + x^2)
```

例 3 $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$.

解 键入命令：

```
>> syms x
>> int(atan(sqrt(x))/(sqrt(x)*(1+x)))
```

输出结果：

```
ans =  atan(x^(1/2))^2
```

2. 在 MATLAB 中计算下列定积分

例 4 求 $\int_0^1 x\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

解 键入命令：

```
>> syms x
>>int('x*log(1+x)',0,1)
```

输出结果：

```
ans = 1/4
```

例 5 求 $\int_{\sin t}^{\ln t} 2x\,\mathrm{d}x$.

解 键入命令：

```
>> syms x
>>int('2*x','sin(t)','log(t)')
```

输出结果：

```
ans = log(t)^2-sin(t)^2
```

CHAPTER 2 拓展模块Ⅱ

数学建模

当今计算机科学飞速发展，许多生产和管理过程都由计算机来控制，这就要求将生产和管理过程中的与规律有关的量与量之间的关系描述出来，这种描述生产、管理或其他变化过程中数量之间的关系的数学表达式，就是这些过程的数学模型. 同时，由于计算机技术的提高，不少原先用人工无法计算的问题，可由计算机解决，这为解决实际问题提供了十分有力的工具. 这些都对我们运用数学及有关专业方面的知识解决实际问题的能力提出了更高的要求，这里首当其冲的就是要建立合理的数学模型.

我们在学习了高等数学的有关概念、理论之后，掌握了一定的计算技巧，甚至能求解一些比较难的计算题. 但在解决实际工作中的问题时常常束手无策，对比较复杂的研究对象，不知如何简化它，用什么样的数学工具将它抽象成一个简单的数学模型来反映客观现实.

为了加强这方面的训练，提高解决问题的能力，我们简要地介绍数学建模的一些基本概念和基本方法. 由于数学模型的建立往往涉及许多数学分支(如微分方程、运筹学、概率论、数理统计、随机过程、模糊数学)与专业知识，所以我们在此应用已学过的高等数学知识，通过实例的介绍，说明如何分清问题的主要因素和次要因素，恰当地抛弃次要因素，提出合理的假设，建立相应的数学模型.

第一节 数学建模简介

一、关于数学模型

目前数学模型还没有一个统一而准确的定义,因为从不同的角度可以对它下不同的定义,因而,不必过于追求严格的定义,我们可以用如下方式去理解它的含义.

从广义上讲,一切数学概念、数学理论体系、各种数学公式、各种方程式、各种函数关系,以及由公式系列构成的算法系统等都可以叫做数学模型.从狭义上讲,只有那些反映特定问题或特定的具体事物系统的数学关系的结构,才叫做数学模型.在现代应用数学中,数学模型都作狭义解释.而建立数学模型的目的,主要是为了解决具体的实际问题.

过去我们遇到的列方程求解应用问题,对实际问题建立函数关系等,所建立的方程、函数可以说就是数学模型雏形.

数学模型的用处非常广泛,能对许多部门的工作起指导和决策作用,如节省开支,减少浪费等,还可以对未来进行预测和估计.

二、建立数学模型的步骤

下面简要介绍建立数学模型的步骤.

(1) 建模准备:了解实际问题的背景,明确要解决问题的目的和要求,收集必要的数据、资料,学习、掌握一定的与问题有关的专业知识,有时可请教这方面的专家.

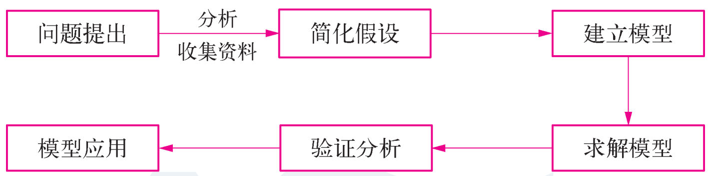
(2) 提出假设:现实问题错综复杂,涉及面广,首先要抓住主要因素,提出几条假设,将问题理想化、简单化.在提出假设时,如果考虑的因素过多、过于复杂会使数学模型无法求解.考虑因素过少,过于简单,则模型与实际问题不吻合,此时则需要修改假设重建新模型.

(3) 建立模型:在所作假设的基础上,利用适当的数学工具来刻画和描述各变量之间的关系,建立相应的数学结构——数学模型.这一步是建立模型的关键.

在建模时究竟采用什么数学工具,要根据问题的特征、建模的目的来决定,而且因人而异.我们要尽量发挥自己的数学特长,同一实际问题可以用不同的数学方法建立不同的数学模型,但一般地,在能够达到预期目的的前提下,所用的数学工具越简单越好,因此要尽可能用简单的模型,如显性化的、均匀化的模型.

（4）模型的分析和检验：建立数学模型，对模型求解，将所得结果与实际情况作比较，以验证模型的正确性．我们不仅要能利用结果来解释已知现象，而且还要分析结果，从中找出规律，发现问题从而达到改造自然的目的，同时，一个较成功的数学模型常常还能预言一些未知的现象．

综合起来讲，数学建模的一般过程可以概括为如图Ⅱ－1所示．



图Ⅱ－1

三、数学建模采用的主要方法

（一）机理分析法

根据对客观事物特性的认识从基本物理定律以及系统的结构数据来推导出模型．

（1）比例分析法：建立变量之间函数关系的最基本、最常用的方法．

（2）代数方法：求解离散问题（离散的数据、符号、图形）的主要方法．

（3）逻辑方法：数学理论研究的重要方法，主要解决社会学和经济学等领域的实际问题，在决策、对策等学科中得到广泛应用．

（4）常微分方程：解决两个变量之间的变化规律，关键是建立“瞬时变化率”的表达式．

（5）偏微分方程：解决因变量与两个以上自变量之间的变化规律．

（二）数据分析法

通过对测量数据的统计分析，找出与数据拟合得最好的模型．

（1）回归分析法：用于对函数 $f(x)$ 的一组观测值 (x_i, f_i)，$i=1, 2, \cdots, n$，确定函数的表达式，由于处理的是静态的独立数据，故称之为数理统计方法．

（2）时序分析法：主要用于处理动态的相关数据，又称之为过程统计方法．

（三）仿真和其他方法

（1）计算机仿真（模拟）：实质上是统计估计方法，等效于抽样试验．

① 离散系统仿真，有一组状态变量．

② 连续系统仿真，有解析表达式或系统结构图．

（2）因子试验法：在系统上作局部试验，再根据试验结果进行不断分析修改，求得所需的模型结构.

（3）人工现实法：基于对系统过去行为的了解和对未来希望达到的目标，并考虑到系统有关因素的可能变化，人为地组成一个系统.

四、数学模型的分类

首先要指出的是，数学模型的分类没有什么特殊的意义，因为基于不同的出发点，根据问题的本身及解决问题的方法，可以有不同的各种分类法，下面列举其中几种分类法.

（1）按所用的数学方法分类：可分为初等模型、微分方程模型、优化模型、控制模型等.

（2）按研究对象所属的范畴分类：可分为人口模型、交通模型、经济模型、生态模型等.

（3）按问题中变量的特征分类：可分为确定性模型与随机模型、连续性模型和离散型模型.

（4）按时间关系分类：可分为静态模型和动态模型.

五、关于数学建模竞赛

当前，全国大学生数学建模竞赛如火如荼，为培养高等职业院校学生数学学习兴趣，提高数学应用能力，各院校可积极组织学有所长的学生参赛. 参加数学建模竞赛，可参照如下方法进行.

（1）模型准备：首先要了解问题的实际背景，明确建模目的，搜集必需的各种信息，尽量弄清对象的特征.

（2）模型假设：根据对象的特征和建模目的，对问题进行必要的、合理的简化，用精确的语言作出假设. 这是建模至关重要的一步. 如果对问题的所有因素一概考虑，无疑是一种方法欠佳的行为，所以高超的建模者能充分发挥想象力、洞察力和判断力，善于辨别主次，而且为了使处理方法简单，应尽量使问题线性化、均匀化.

（3）模型构成：根据所作的假设，分析对象的因果关系，利用对象的内在规律和适当的数学工具，构造各个量间的等式关系或其他数学结构. 这时，我们便会进入一个广阔的应用数学天地，这里在高数、概率"老人"的膝下，有许多可爱的"孩子们"，它们是图论、排队论、线性规划、对策论等，可谓别有洞天. 不过我们应当牢记，建立数学模型是为了让更多的人明了并能加以应用，因此工具愈简单愈有价值.

（4）模型求解：可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值运算等各种数学方法，特别是计算机技术进行求解. 一个实际问题的解决往往需要纷繁的计算，许多时候还得

将系统运行情况用计算机模拟出来，因此编程能力和熟悉数学软件的能力便举足轻重.

（5）模型分析：对模型解答进行数学上的分析.“横看成岭侧成峰，远近高低各不同.”能否对模型结果作出细致精当的分析，决定了你的模型能否达到更高的档次. 还要记住，不论哪种情况都要进行误差分析、数据稳定性分析.

第二节 数学建模举例

本节试举三例，略窥数学建模及求解.

问题一　车间的 CO_2 排放问题.

有一车间体积为 10 800 m^3，开始时空气中含有 0.12%的 CO_2，为了保证工人的身体健康，车间空气中的 CO_2 的含量不得超过 0.06%，已知空气中的 CO_2 含量为 0.04%，现用鼓风机向车间内输入新鲜空气，要求

（1）给出鼓风机起动后，车间空气中 CO_2 的含量与时间的关系式；

（2）用多大排风量的鼓风机可使车间空气中的 CO_2 含量在鼓风机起动 10 min 后达到要求.

建模：

鼓风机起动后，车间空气中 CO_2 的含量是个变量，新鲜空气输入后，它和车间的空气混合，又以同样的排风量被排出.

现作假设：

（1）鼓风机的排风量是常数.

（2）输入的新鲜空气中 CO_2 的含量保持 0.04%不变.

（3）输入的新鲜空气，认为立即与原车间内的空气均匀混合，并以相同的排风量将混合后的空气排出车间.

设鼓风机起动后车间空气中的 CO_2 的含量为 $x\%$，$x=x(t)$；令鼓风机的排风量为 $N(\mathrm{m}^3/\mathrm{min})$.

由于车间空气中 CO_2 的含量随时在变，我们考虑在 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 一小段时间 $\mathrm{d}t$ 内，车间空气中 CO_2 的含量的变化应有以下等量关系：

$$\text{车间内 } CO_2 \text{ 的改变量}=(CO_2\text{ 通入量})-(CO_2\text{ 排出量}),$$

可记作

$$\Delta Q=\Delta Q_1-\Delta Q_2. \tag{Ⅱ-1}$$

下面将这三个量计算出来：

$$\begin{aligned}\Delta Q_1 &= (\text{鼓风机在 d}t\text{ 时间内通入的空气量}) \times 0.04\% \\ &= N\mathrm{d}t \times 0.04\%, \\ \Delta Q_2 &= (\text{在 d}t\text{ 内排出的空气量}) \times (CO_2\text{ 的百分比}).\end{aligned}$$

由于在 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 这段时间，车间内 CO_2 的百分比不断在变化，所以要精确算出 ΔQ_2 比较困难.但是，当 $\mathrm{d}t$ 很小时，可以将 CO_2 的含量近似看作不变，即可用 $x(t)\%$ 作为在 $\mathrm{d}t$ 时间内 CO_2 的百分数，于是可得

$$\Delta Q_2 \approx N \times \mathrm{d}t \times x\%,$$

$$\begin{aligned}\Delta Q &= (t+\mathrm{d}t\text{ 时刻车间内 } CO_2\text{ 的含量}) - (t\text{ 时刻车间内 } CO_2\text{ 的含量}) \\ &= 10\,800x(t+\mathrm{d}t)\% - 10\,800x \cdot t\% \\ &= 10\,800[x(t+\mathrm{d}t) - xt]\% \\ &= 10\,800\Delta x\% \approx 10\,800\mathrm{d}x\%.\end{aligned}$$

将各量代入式(Ⅱ-1)，并约去百分号，得

$$10\,800\mathrm{d}x = N(0.04 - x)\mathrm{d}t,$$

化简为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{N}{10\,800}(x - 0.04), \tag{Ⅱ-2}$$

初始条件为 $x|_{t=0} = 0.12$，所以该问题的数学模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{N}{10\,800}(x - 0.04), \\ x|_{t=0} = 0.12.\end{cases}$$

求解：

方程(Ⅱ-2)为可分离变量的微分方程，解得

$$x = 0.04 + C\mathrm{e}^{-\frac{N}{10\,800}t}.$$

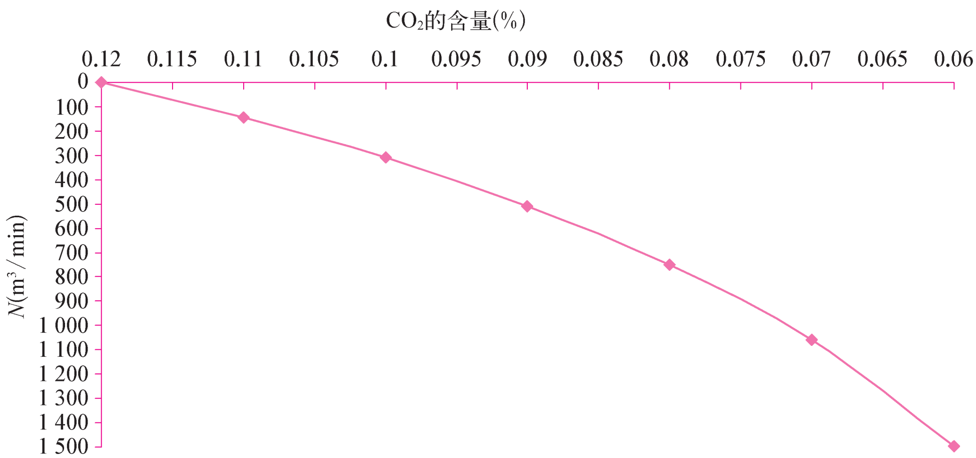
满足初始条件的特解为

$$x = 0.04(1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{N}{10\,800}t}). \tag{Ⅱ-3}$$

当 $t = 10$ min 时，x 取 0.06，从式(Ⅱ-3)中可解得

$$N \approx 1\,500.$$

即选择排风量为 1 500 $\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ 的鼓风机，起动 10 min 后即可使车间空气中 CO_2 的含量达到 0.06%的标准，如图Ⅱ-2 所示.



图Ⅱ-2

上述这种方法称为微小增量分析法，先分析在自变量 t 的一个微小变化 dt 内，未知函数 x 的微小变化，列出 dx，dt 的关系式，便可得到有关 x 的微分方程. 这是建立微分方程模型常用的方法.

问题二　反复学习及效率.

心理学研究指出，任何一种新技能的获得和提高都要通过一定的时间学习. 在学习中，常常会碰到这样的现象，有的学生学得快，掌握得深，而有的学生学得差，掌握得浅. 以学习计算机为例，假设每学习计算机一次，能掌握一定的新内容，每次学习所掌握的内容占上次学习内容的百分比为常数 $A(0<A<1)$，试用数学知识来描述经过多少次学习，就能基本掌握计算机知识.

建模：

根据实际情况可知，学习是一个积累的过程，其掌握知识的程度不但与学习者的初始程度有关，而且与学习者的学习程度有关. 该问题的初态即为开始学习时所掌握的知识的程度，目标是经过一定次数的学习后所掌握的知识的程度，而联系初态及目标的过程即为每次学习所掌握的程度，问题力求找出学习次数与所掌握计算机知识之间的关系，因此需要对该问题做如下假设：

假设 1　b_0 为开始学习计算机时所掌握的程度.

假设 2　b_n 为经过 n 次学习计算机后所掌握的程度 $(n=1, 2, 3, \cdots)$.

易知 $0<b_0<1$. 根据上面的假设，$1-b_0$ 就是开始第一次学习后尚未掌握的新内容，经过一次学习掌握的新内容为 $A(1-b_0)$，于是

$$b_1-b_0=A(1-b_0). \tag{Ⅱ-4}$$

类似地，有 $b_2-b_1=A(1-b_1)$. 以此类推，得到经过 n 次学习计算机所掌握的知识的程度为

$$b_{n+1}-b_n=A(1-b_n),\ n=1,2,3,\cdots,$$

即
$$b_{n+1}=(1-A)b_n+A,\ n=1,2,3,\cdots. \quad (\text{Ⅱ}-5)$$

求解：

根据式(Ⅱ-5)，有

$$b_1=(1-A)b_0+A=1-(1-b_0)(1-A),$$
$$b_2=(1-A)b_1+A=1-(1-b_1)(1-A)=1-(1-b_0)(1-A)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

因此经过迭代，有

$$b_n=(1-A)b_{n-1}+A=1-(1-b_0)(1-A)^n,\ n=1,2,3,\cdots. \quad (\text{Ⅱ}-6)$$

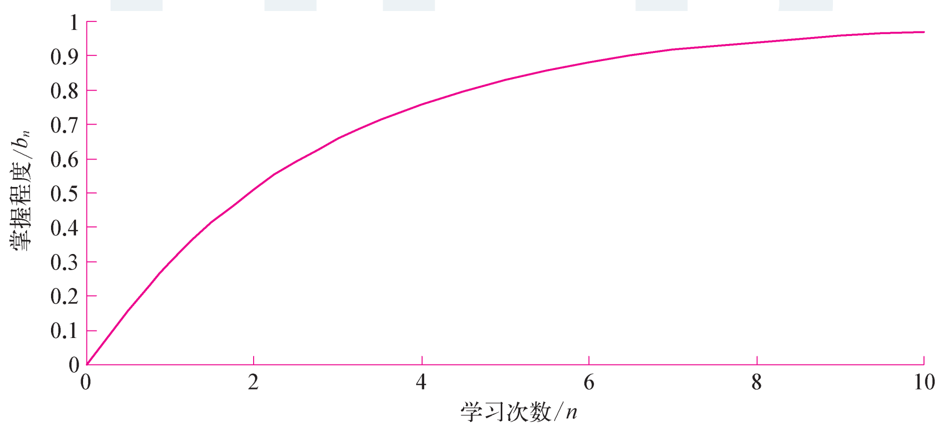
可以看出，当学习次数 n 增大时，b_n 随之增大，且越来越接近于 1(100%)，但不会达到(100%). 这说明了一个道理：熟能生巧，学无止境.

一般情况下，$b_0=0$，即开始学习时，学习者对计算机一无所知，如果每次学习掌握的程度为 30%，逐个代入数据，如表Ⅱ-1 所示.

表Ⅱ-1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	0.3	0.51	0.66	0.76	0.83	0.88	0.92	0.94	0.96	0.97

将以上数据在 Excel 中做成平滑的曲线图，如图Ⅱ-3 所示.



图Ⅱ-3

从图Ⅱ-3 可以看出，随着学习的进行，掌握程度越来越慢，这也就是学习的道理：入门容易，深入钻研难！

问题三　酵母菌繁殖.

酵母菌是人类文明史中被应用得最早的微生物，可在缺氧环境中生存. 酵母菌在自然界分布广泛，主要生长在偏酸性的潮湿的含糖环境中. 在食品加工十分重要.

表Ⅱ-2是某酵母菌存活数量(以下简称酵母量)与时间的关系，请就二者关系建立模型.

表Ⅱ-2

时间/h	0	1	2	3	4	5	6
酵母量/百个	9.6	18.3	29.0	47.2	71.1	119.1	174.6
时间/h	7	8	9	10	11	12	13
酵母量/百个	257.3	350.7	441.0	513.3	559.7	594.8	629.4
时间/h	14	15	16	17	18		
酵母量/百个	640.8	651.1	655.9	659.6	661.8		

建模：

1. 模型假设

假设1：酵母菌繁殖环境不变.

假设2：酵母菌繁殖达到最大数量时，增长率为零.

2. 符号约定

t：时间；

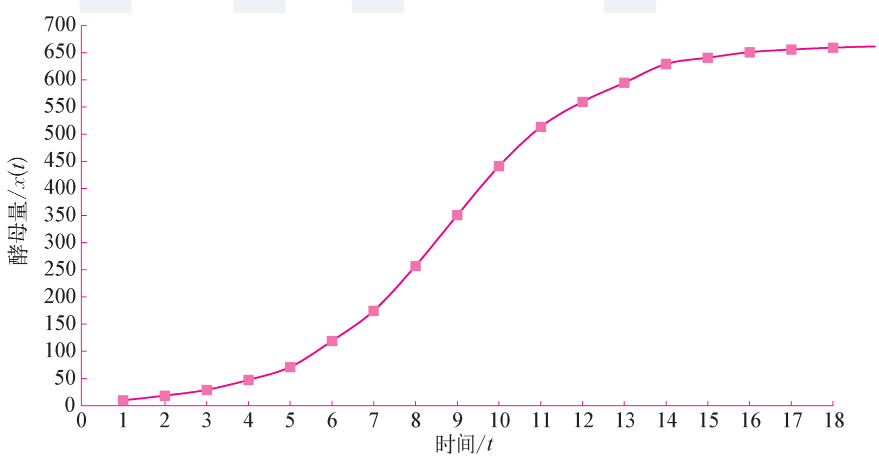
$x(t)$：时刻 t 时的酵母量；

$x(k)$：时刻 t 时的酵母量，k 为正整数；

x_m：酵母量的最大值；

Δx_k：差分.

将所给数据绘制成光滑曲线图，点分布在一条 S 形曲线上，如图Ⅱ-4所示.

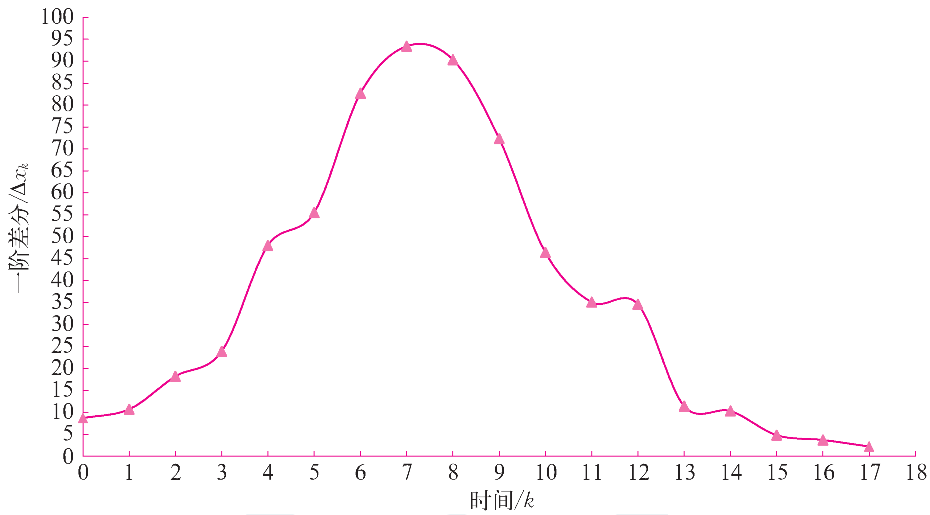


图Ⅱ-4

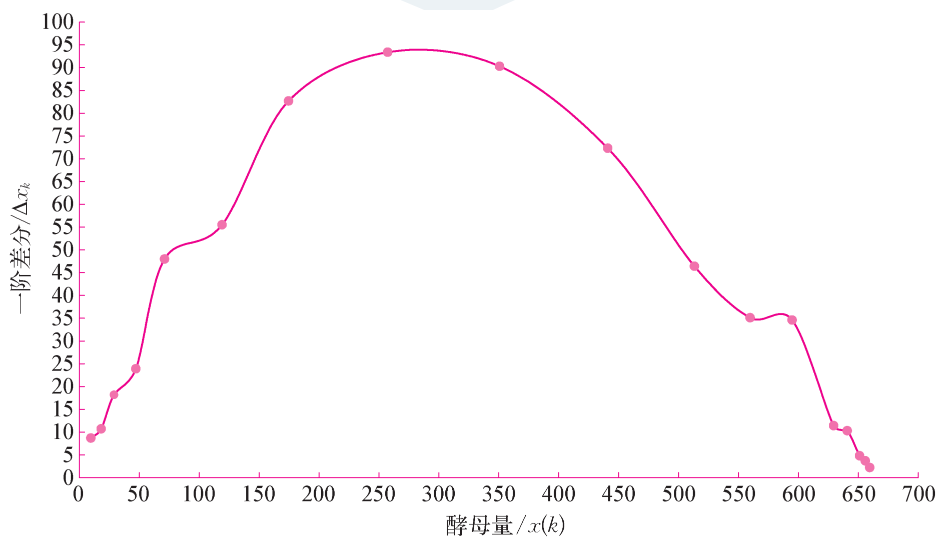
由图Ⅱ-4可知：酵母量是时间 t 的增函数，先凹后凸.为进一步分析递增速度，计算

$$\Delta x_k = x(k+1) - x(k),\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 17. \tag{Ⅱ-7}$$

式(Ⅱ-7)就是 $x(t)$ 的一阶差分，时间与一阶差分 Δx_k 的曲线图如图Ⅱ-5所示，酵母量与一阶差分 Δx_k 的曲线图如图Ⅱ-6所示.



图Ⅱ-5



图Ⅱ-6

从图Ⅱ-5可以看到，当 $k \approx 7$ 时酵母菌繁殖速度达到最大值. $k \in (0,\ 6)$ 时函数基本上单调增加，$k \in (7,\ 17)$ 时函数基本上单调减少，可以利用分段差分方程研究 $x(k)$ 的近似表示.

记

$$\Delta x_k = \alpha x(k) + \beta, \tag{Ⅱ-8}$$

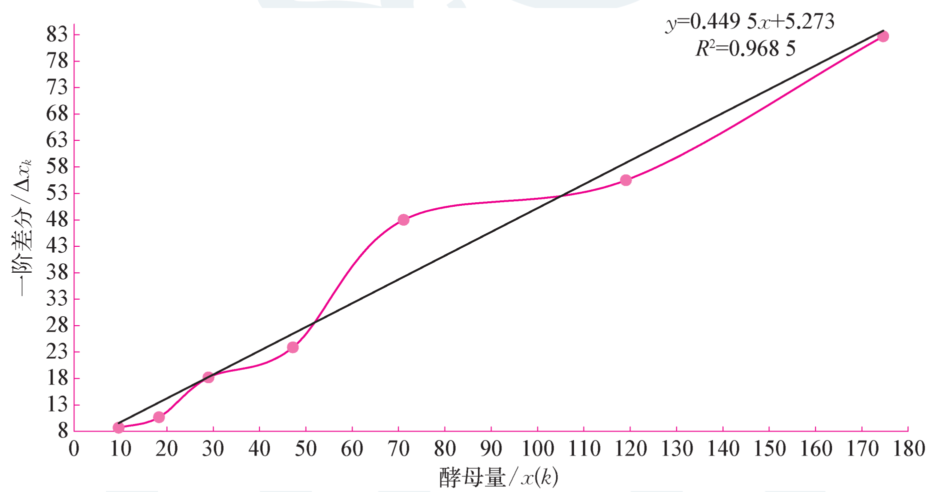
得差分方程

$$x(k+1) - (1+\alpha)x(k) = \beta. \tag{Ⅱ-9}$$

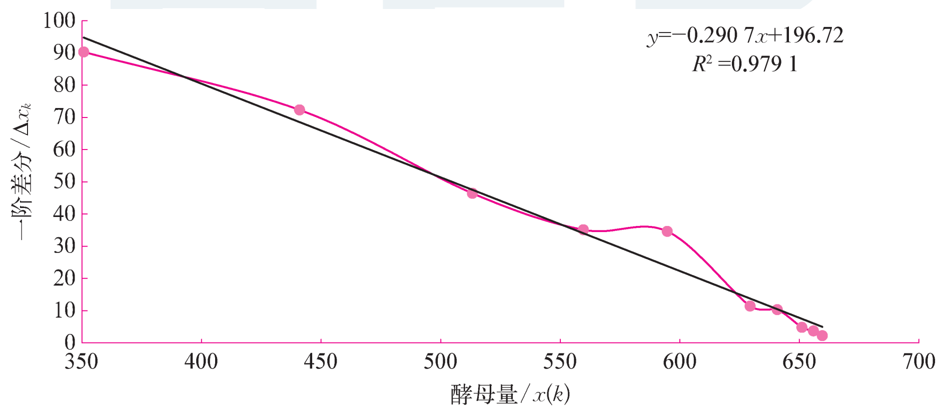
根据差分方程通解的有关理论,式(Ⅱ-8)的通解为

$$x(k) = \begin{cases} A(1+\alpha)^k - \dfrac{\beta}{\alpha}, & \alpha \neq 0, \\ A + \beta k, & \alpha = 0. \end{cases} \tag{Ⅱ-10}$$

利用 Excel 作分段拟合,如图Ⅱ-7、图Ⅱ-8 所示.



图Ⅱ-7

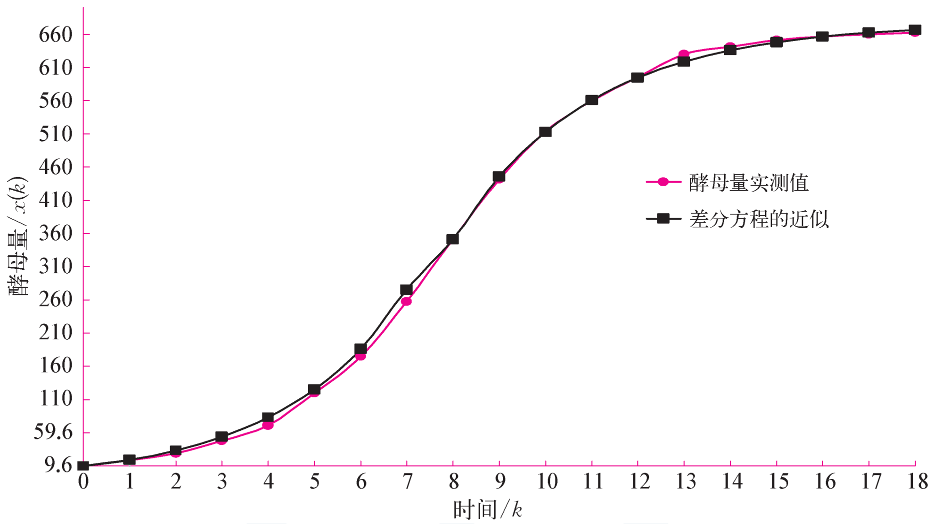


图Ⅱ-8

选择添加趋势线分别得到:$\alpha_1 = 0.449\,5$,$\beta_1 = 5.273$;$\alpha_2 = -0.290\,7$,$\beta_2 = 196.72$,并注意到 $x(0) = 9.6$,$x(8) = 350.7$,有

$$x(k)=\begin{cases}21.330\,812\times(1.449\,5)^k-11.730\,812, & k=0,1,2,\cdots,7,\\ -5\,088.538\,83\times(0.709\,3)^k+676.711\,386, & k=8,9,\cdots,18.\end{cases}\tag{Ⅱ-11}$$

酵母量实测值与差分方程的近似拟合效果图如图Ⅱ-9所示.



图Ⅱ-9

由式(Ⅱ-11)可知,

$$\lim_{k\to\infty}x(k)=676.711\,386,\text{即 } x_m=676.7.$$

附　录

APPENDIX 1 附录Ⅰ

初等数学常用公式

一、乘法公式与二项式定理

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$；

(2) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$；

(3) $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$；

(4) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$；

(5) $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$.

二、因式分解

(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$；

(3) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$.

三、分式裂项

(1) $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$；

(2) $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+b}\right)$.

四、指数运算

(1) $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}(a\neq 0)$；

(2) $a^0=1$；

(3) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\,(a\geqslant 0)$；

(4) $a^m a^n=a^{m+n}$；

(5) $a^m\div a^n=a^{m-n}$；

(6) $(a^m)^n=a^{mn}$；

(7) $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n=\dfrac{b^n}{a^n}\,(a\neq 0)$；

(8) $(ab)^n=a^n b^n$；

(9) $\sqrt{a^2}=|a|$.

五、对数运算

(1) $a^{\log_a N}=N$；

(2) $\log_a b^n=n\log_a b$；

(3) $\log_a \sqrt[n]{b}=\dfrac{1}{n}\log_a b$；

(4) $\log_a a=1$；

(5) $\log_a 1=0$；

(6) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$；

(7) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(8) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$；

(9) $\lg a=\log_{10} a$，$\ln a=\log_e a$.

六、排列组合

(1) $\mathrm{P}_n^m=n(n-1)\cdot\cdots\cdot[n-(m-1)]=\dfrac{n!}{(n-m)!}$（约定 $0!=1$）；

(2) $\mathrm{C}_n^m=\dfrac{\mathrm{P}_n^m}{m!}=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$；

(3) $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$；

(4) $\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}=\mathrm{C}_{n+1}^m$；

(5) $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$.

七、三角函数

1. 函数关系

倒数关系：

(1) $\sin\alpha\csc\alpha=1$；

(2) $\cos\alpha\sec\alpha=1$；

(3) $\tan\alpha\cot\alpha=1$.

平方关系：

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

(2) $\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$；

(3) $\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$.

商数关系：

(1) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$；

(2) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$.

2. 加法定理

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$；

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$.

3. 二倍角公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$；

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$；

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$.

4. 和差化积公式

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

5. 积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$；

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$；

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$；

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$.

6. 升降幂公式

降幂扩角公式：

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

升幂缩角公式：

$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$；

$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$；

$1\pm\sin 2\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$.

7．半角公式

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

8．万能置换公式

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha};\qquad \cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}.$$

9．特殊角的三角函数值

特殊角的三角函数值见附表 1.

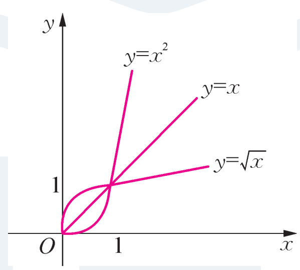
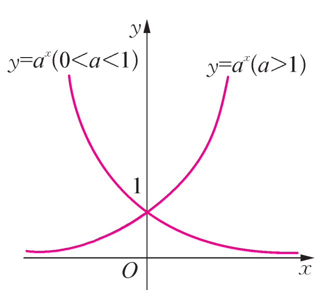
附表 1

三角函数	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

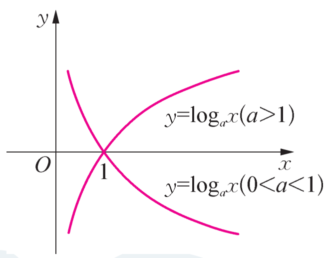
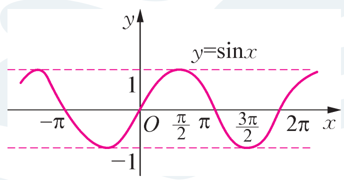
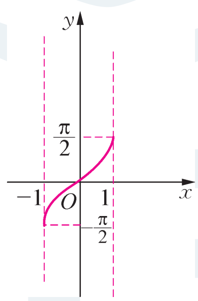
APPENDIX 2 附录Ⅱ

基本初等函数图像性质表

附表 2

函数名称	函数的记号	函数的图像	函数的性质
幂函数	$y=x^{\alpha}$（α 为任意实数）	 这里只画出部分函数图像的一部分	令 $\alpha=m/n$ （1）当 m 为偶数，n 为奇数时，y 是偶函数； （2）当 m，n 都是奇数时，y 是奇函数； （3）当 m 为奇数，n 为偶数时，y 在$(-\infty,0)$无意义
指数函数	$y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）		（1）不论 x 为何值，y 总为正数； （2）当 $x=0$ 时，$y=1$

续　表

函数名称	函数的记号	函数的图像	函数的性质
对数函数	$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq 1)$		(1) 其图形总位于 y 轴右侧，并过点$(1,\ 0)$； (2) 当 $a>1$ 时，在区间$(0,\ 1)$的值为负；在区间$(1,\ +\infty)$的值为正；在定义域内单调增加
三角函数(这里只写出了正弦函数)	$y=\sin x$		(1) 正弦函数是以 2π 为周期的周期函数； (2) 正弦函数是奇函数且 $\lvert \sin x \rvert \leqslant 1$
反三角函数(这里只写出了反正弦函数)	$y=\arcsin x$		(1) 值域$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$； (2) 奇函数； (3) 与 $y=\sin x$ 关于 $y=x$ 对称

APPENDIX 3

附录Ⅲ 积分表

一、含有 $a+bx$ 的积分

1. $\int \frac{dx}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln|a+bx|+C$；

2. $\int (a+bx)^n dx=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}+C(n\neq -1)$；

3. $\int \frac{x}{a+bx}dx=\frac{1}{b^2}(a+bx-a\ln|a+bx|)+C$；

4. $\int \frac{x^2}{a+bx}dx=\frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2-2a(a+bx)+a^2\ln|a+bx|\right]+C$；

5. $\int \frac{dx}{x(a+bx)}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|+C$；

6. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)}=-\frac{1}{ax}+\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|+C$；

7. $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bx|+\frac{a}{a+bx}\right)+C$；

8. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2}=\frac{1}{b^3}\left(a+bx-2a\ln|a+bx|-\frac{a^2}{a+bx}\right)+C$；

9. $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2}=\frac{1}{a(a+bx)}-\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|+C.$

二、含有 $a^2\pm x^2$ 的积分

10. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}}(n \neq 1)$；

12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$；

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

三、含有 $a \pm bx^2$ 的积分

14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\sqrt{\frac{b}{a}}x + C(a>0,b>0)$；

15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}x}{\sqrt{a}-\sqrt{b}x}\right| + C(a>0,b>0)$；

16. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln|a+bx^2| + C$；

17. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}$；

18. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x^2}{a+bx^2}\right| + C$；

19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}$；

20. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}$.

四、含有 $a+bx \pm cx^2\,(c>0)$ 的积分

21. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx-cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b}\right| + C$；

22. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx+cx^2} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C(b^2<4ac), \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C(b^2>4ac). \end{cases}$$

五、含有$\sqrt{a+bx}$的积分

23. $\int \sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}+C$；

24. $\int x\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x=-\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2}+C$；

25. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x=\frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3}+C$；

26. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}}=-\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx}+C$；

27. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx}}=\frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx}+C$；

28. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{|\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}|}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C\ (a>0), \\ \frac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+C\ (a<0)；\end{cases}$

29. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}}$；

30. $\int \frac{\sqrt{a+bx}\,\mathrm{d}x}{x}=2\sqrt{a+bx}+a\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a+bx}}$.

六、含有$\sqrt{x^2+a^2}$的积分

31. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$；

32. $\int \sqrt{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$；

33. $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}{3}+C$；

34. $\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$；

35. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$；

36. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C$；

37. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C$；

38. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$；

39. $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$；

40. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{|x|}{a+\sqrt{x^2+a^2}} + C$；

41. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C$；

42. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x}{x} = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{|x|} + C$；

43. $\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$.

七、含有$\sqrt{x^2-a^2}$的积分

44. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$；

45. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C$；

46. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C$；

47. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$；

48. $\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$；

49. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3} + C$；

50. $\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5} + C$；

51. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$;

52. $\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$;

53. $\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$;

54. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|}+C$;

55. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}+C$;

56. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C$;

57. $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$.

八、含有$\sqrt{a^2-x^2}$的积分

58. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$;

59. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$;

60. $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C$;

61. $\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C$;

62. $\int\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$;

63. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$;

64. $\int\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C$;

65. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}+C$;

66. $\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx=-\dfrac{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}{3}+C$；

67. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\dfrac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^4}{8}\arcsin\dfrac{x}{a}+C$；

68. $\int\dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\dfrac{x}{a}+C$；

69. $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right|+C$；

70. $\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C$；

71. $\int\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left|\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C$；

72. $\int\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx=-\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\dfrac{x}{a}+C$.

九、含有$\sqrt{a+bx\pm cx^2}$ $(c>0)$的积分

73. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}|+C$；

74. $\int\sqrt{a+bx+cx^2}\,dx=\dfrac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}-$
$\dfrac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}}\ln|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}|+C$；

75. $\int\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\dfrac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c}-\dfrac{b}{2\sqrt{c^3}}\ln|2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}|+C$；

76. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{c}}\arcsin\dfrac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$；

77. $\int\sqrt{a+bx-cx^2}\,dx=\dfrac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2}+$
$\dfrac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}}\arcsin\dfrac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$；

78. $\int\dfrac{x\,dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}=-\dfrac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c}+\dfrac{b}{2\sqrt{c^3}}\arcsin\dfrac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}}+C$.

十、含有$\sqrt{\dfrac{a\pm x}{b\pm x}}$的积分和含有$\sqrt{(x-a)(b-x)}$的积分

79. $\int\sqrt{\dfrac{a+x}{b+x}}\mathrm{d}x=\sqrt{(a+x)(b+x)}+(a-b)\ln(\sqrt{|a+x|}+\sqrt{|b+x|})+C$；

80. $\int\sqrt{\dfrac{a-x}{b+x}}\mathrm{d}x=\sqrt{(a-x)(b+x)}+(a+b)\arcsin\sqrt{\dfrac{x+b}{a+b}}+C$；

81. $\int\sqrt{\dfrac{a+x}{b-x}}\mathrm{d}x=-\sqrt{(a+x)(b-x)}-(a+b)\arcsin\sqrt{\dfrac{b-x}{a+b}}+C$；

82. $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}+C(a>b)$.

十一、含有三角函数的积分

83. $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

84. $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$；

85. $\int\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$；

86. $\int\cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$；

87. $\int\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C=\ln\left|\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)\right|+C$；

88. $\int\csc x\,\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C=\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|+C$；

89. $\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\tan x+C$；

90. $\int\csc^2 x\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$；

91. $\int\sec x\tan x\,\mathrm{d}x=\sec x+C$；

92. $\int\csc x\cot x\,\mathrm{d}x=-\csc x+C$；

93. $\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$；

94. $\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$;

95. $\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \, dx$;

96. $\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \, dx$;

97. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$;

98. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = -\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$;

99. $$\int \cos^m x \sin^n x \, dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x \, dx$$
$$= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x \, dx;$$

100. $\int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C\ (m^2 \neq n^2)$;

101. $\int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C\ (m^2 \neq n^2)$;

102. $\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C\ (m^2 \neq n^2)$;

103. $\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arctan \frac{a\tan\frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C\ (a^2 > b^2)$;

104. $\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a\tan\frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}}\right| + C\ (a^2 < b^2)$;

105. $\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) + C\ (a^2 > b^2)$;

106. $\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}\right| + C\ (a^2 < b^2)$;

107. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b\tan x}{a}\right) + C$;

108. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{b\tan x + a}{b\tan x - a}\right| + C$;

109. $\int x\sin ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{1}{a}x\cos ax + C$;

110. $\int x^2\sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}x^2\cos ax + \frac{2}{a^2}x\sin ax + \frac{2}{a^3}\cos ax + C$;

111. $\int x\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{1}{a}x\sin ax + C$;

112. $\int x^2\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^2\sin ax + \frac{2}{a^2}x\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax + C$.

十二、含有反三角函数的积分

113. $\int \arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C$;

114. $\int x\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2} + C$;

115. $\int x^2\arcsin\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + C$;

116. $\int \arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C$;

117. $\int x\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\arccos\frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2} + C$;

118. $\int x^2\arccos\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arccos\frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + C$;

119. $\int \arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2 + x^2) + C$;

120. $\int x\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(a^2 + x^2)\mathrm{artan}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2} + C$;

121. $\int x^2\arctan\frac{x}{a}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\arctan\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(a^2 + x^2) + C$.

十三、含有指数函数的积分

122. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

123. $\int e^{ax}\,dx=\dfrac{e^{ax}}{a}+C$；

124. $\int e^{ax}\sin bx\,dx=\dfrac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$；

125. $\int e^{ax}\cos bx\,dx=\dfrac{e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$；

126. $\int x e^{ax}\,dx=\dfrac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)+C$；

127. $\int x^n e^{ax}\,dx=\dfrac{x^n e^{ax}}{a}-\dfrac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$；

128. $\int x a^{mx}\,dx=\dfrac{x a^{mx}}{m\ln a}-\dfrac{a^{mx}}{(m\ln a)^2}+C$；

129. $\int x^n a^{mx}\,dx=\dfrac{x^n a^{mx}}{m\ln a}-\dfrac{n}{m\ln a}\int x^{n-1}a^{mx}\,dx$；

130. $\int e^{ax}\sin^n bx\,dx=\dfrac{e^{ax}\sin^{n-1}bx}{a^2+b^2n^2}(a\sin bx-nb\cos bx)+\dfrac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}bx\,dx$；

131. $\int e^{ax}\cos^n bx\,dx=\dfrac{e^{ax}\cos^{n-1}bx}{a^2+b^2n^2}(a\cos bx-nb\sin bx)+\dfrac{n(n-1)b^2}{a^2+b^2n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}bx\,dx$.

十四、含有对数函数的积分

132. $\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C$；

133. $\int \dfrac{1}{x\ln x}dx=\ln|\ln x|+C$；

134. $\int x^n\ln x\,dx=x^{n+1}\left[\dfrac{\ln x}{n+1}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right]+C$；

135. $\int \ln^n x\,dx=x\ln^n x-n\int \ln^{n-1}x\,dx$；

136. $\int x^m\ln^n x\,dx=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x-\dfrac{n}{m+1}\int x^m\ln^{n-1}x\,dx$.

参考文献

[1] 马忠林，张永春. 数学课程论[M]. 南宁：广西教育出版社，1996.

[2] 曹才翰，章建跃. 数学教育心理学[M]. 北京：北京师范大学出版社，1999.

[3] 郑毓信. 数学文化学[M]. 成都：四川教育出版社，2001.

[4] 张志涌，杨祖樱. MATLAB 教程[M]. 北京：北京航空航天大学出版社，2010.

[5] 姜晓明. 高等数学[M]. 北京：机械工业出版社，2007.

[6] 米尔斯切特. 数学建模方法与分析[M]. 北京：机械工业出版社，2005.

HEP

本/书/另/配

PPT等教学资源

服务QQ：800078148

高等数学课程研讨QQ群：290441962

ISBN 978-7-04-050455-2

9 787040 504552 >

定价：36.00元